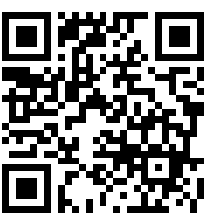
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

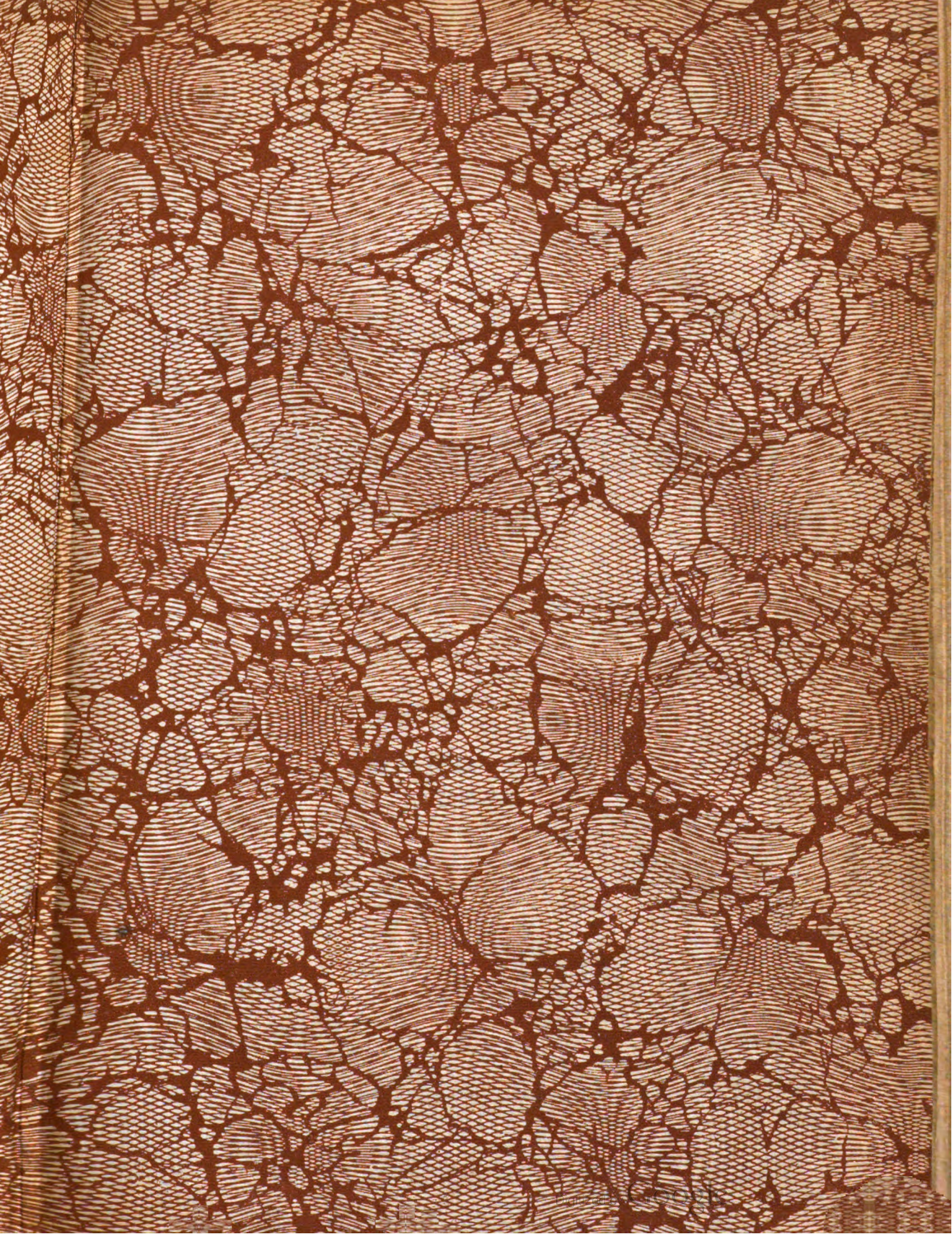
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Digitized by Google

11.394

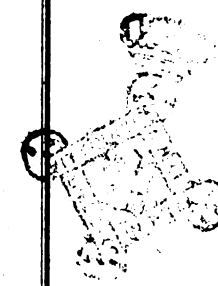
N. 1 PERIODICO TRIMESTRALE 1916

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA



ANNO XVIII
1916

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1916

Pubblicato il 10 Aprile 1916.

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI
GINO LORIA

ANNO XVIII
1916

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1916

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Pavia - Premiata Tipografia Successori Fratelli Fusi

Digitized by Google

INDICE

R. Marcolongo, Luciano Orlando (1877-1915), p. 1-10.
F. Severi, Ruggiero Torelli (1884-1915), p. 11-21.
J. H. Graf, La correspondance entre Ludwig Schläfli et des mathématiciens Italiens de son époque. III. Correspondence entre L. Schläfli et F. Casorati, p. 21-35, 50-64, 81-83, 113-121.

RECENSIONI ED ANNUNZI

F. Calderara, Introduzione allo studio della geometria superiore (G. L.), p. 36-7. — **J. König**, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre (G. Vivanti), p. 37-39. — **P. Pizzetti**, Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti (A. Viterbi), p. 39-44. — **F. Bützenberger**, Ueber bizentrische Polygone, Steinersche Kreis-und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion (G. L.), p. 45-46. — **Serret-Harnack-Scheffers**, Differential-und Integralrechnung, III Bd. (G. L.), p. 65. — Oeuvres complètes de T. J. Stieltjes. T. I. (G. L.), p. 65-66. — **G. Milhaud**, Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique (G. L.), p. 66. — **T. L. Heath-F. Kliem**, Archimedes Werke (G. L.), p. 66-67. — **Guimaraes**, Sur la vie et l'oeuvre de P. Nunes (G. L.) p, 67. — **J. Rey Pastor**, Los matematicos espanoles del siglo XVI (G. L.), p. 67. — **A. Mitscherling** Das Problem der Kreistheilung (G. L.), p. 67-70. — **M. Chini**, Esercizi di calcolo infinitesimale (G. Vivanti), p. 71-73. — **G. S. L. Carson** and **D. E. Smith**, Elements of Algebra, I e II (G. L.), p. 73-75. — **G. S. L. Carson** and **D. E. Smith**, Plane Geometry, I e II (G. L.), p. 75-78. — Annuaire pour l'an 1916 publié par le Bureau des Longitudes (G. L.), p. 78. — **L. Bianchi**, Lezioni di Geometria analitica (E. Ciani), p. 84-92. — **E. E. Levi**, Elementi della teoria delle funzioni e Calcolo delle variazioni (G. Fubini), p. 93-102. — **F. Enriques**, Questioni riguardanti le matematiche elementari, (S. Medici), p. 102-109. — The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy: I. Tranfinite Numbere by **G. Cantor**, II. Scottih Philosophy (G. L.), p. 121-122. — **F. Pahl**, Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts (G. L.) p. 122-125. — **H. Suter**, Die astronomischen Tafeln des Muhammed Ban Musa Al-Khwarizmi (G. L.), p. 125-126. — **A. de Morgan**, Essays on the Life and Work of Newton (G. L.), p. 126-127. — **G. Salmon**, A treatise on the analitic Geometry of three Dimensions (G. L.), p. 127-128. — **L. E. Dickson**, Elementary Theory of Equations (G. L.), p. 128-129. — **E. Borel**, Introductions géométrique à quelques théories physiques (G. Vivanti), p. 129-133. — **J. W. Young**, Lectures on fundamental Concepts of Algebra and Geometry, (G. L.), p. 133-134. — **F. Sibirani**, Riassunto-formulario di Geometria analitica, Algebra ecc. (L. Galvani), p. 134-135. — **G. A. Maggi**, Geometria del movimento (U. Gisotti), p. 136-141.

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Favaro, Pascal, Tweedie, Cajori, Luzio, Loria, Bortolotti, Vacca (109-112).

NOTIZIE

G. B. Guccia. Cinquant'anni di storia italiana. Quarant'anni di studi galileiani. Concorso a premio per le matematiche. Per la storia delle aberrazioni umane. Un importante carteggio scientifico. L'invito a Lesbia Cidonia. p. 46-48.

Per la storia dalla teoria delle trasformazioni di contatto. Ruggero Bacone. Il posto accordato ai matematici in una raccolta di classici. Tema proposto dalla R. Accademia di Danimarca. p. 78-80.

Premi proposti dall'Istituto di Francia. The mathem. Association of America. Proroga di concorso. R. Dedekind. Istituto matematico dei conjugi Mittag-Leffler. Temi di matematica proposti dalla R. Accademia di Madrid. Biblioteca scientifico-politecnica internazionale. I manoscritti di S. Lie. p. 141-144.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVIII, Fasc. I: **Gennaio, Febbraio e Marzo** 1916

Luciano Orlando (1877-1915)

di **ROBERTO MARCOLONGO**

La notte del 21 agosto 1915 un manipolo di audaci eseguiva l'attacco del ponte di S. Daniele, presso Tolmino, sull'Isonzo.

« Li conduceva, scrive Luigi Barzini, un ufficiale del genio, « professore di Università prima della guerra. Partiva calmo, se- « reno, come quando s'incamminava verso la lezione con dei libri « sotto al braccio. Dove nessuno osava andare, dove la morte « pareva certa, andava lui solo. Alla notte lui era sul ponte, « strisciando, avanzando centimetro per centimetro, spingendo « avanti a sè un tubetto di esplosivo. L'ultima volta, quando la « strada era quasi del tutto aperta, non è tornato indietro. Una « palla lo aveva fulminato ».

L'ufficiale del genio era il capitano Luciano Orlando.

La grande guerra europea aveva già dato un colpo mortale alla sua fortuna; un'altra piccola guerra (così egli si esprimeva) aveva quasi troncate le sue aspirazioni ad una cattedra universitaria. Pur tuttavia aveva subito risposto all'appello della patria, seguendo l'impulso dell'anima nobilissima ed ardente come il sole dell'isola natìa; ed era partito colla stessa fede, colla stessa fermezza con cui aveva guidato una schiera di studenti dell'Ateneo romano in soccorso dei miseri colpiti dal terremoto calabro-siculo del 1908; ardimentoso tra gli ardimentosi, sprezzante di ogni pericolo, sempre sereno e forte. A guerra finita, avrebbe ripreso gli studi, ricostituito il patrimonio; sarebbe tornato alla sposa adorata (così le scriveva pochi giorni prima di incontrare la morte gloriosa), ai suoi tre angioletti; perchè la sua tempra di acciaio, il suo ingegno grandissimo non conoscevano defezioni e scoramenti.

Invece non è più tornato indietro! L'unica ricompensa, la medaglia d'argento, conquistata a prezzo della propria vita, è anche l'unico e glorioso retaggio ch'egli lascia ai suoi cari!

Digitized by Google

***

Luciano Orlando era nato a Caronia (Messina) il 13 maggio 1877, da Ruggiero e da Elisa Pagani. Il padre, già brillante ufficiale di cavalleria, si era ritirato a Caronia per amministrare i suoi beni, dedicarsi agli studi filosofici e all'educazione dei figliuoli. Luciano, unico superstite, di ingegno vivacissimo, trovò troppo angusta la cerchia del paesello natio. Si dedicò agli studi classici, che seguì in varie città d'Italia, e pei quali conservò sempre una immensa passione. Ammesso alla Accademia militare di Torino, ove gli fu maestro il Peano, ottenne il diploma di tenente del genio nel 1900. Ai primi del 1901, essendo di guarnigione a Messina, volle ampliare e approfondire la sua cultura matematica colla guida sapiente e sicura dei professori Bagnera e Vivanti. Inscrittosi al 2° biennio della Facoltà di scienze, conseguì la laurea in matematica nel 1903.

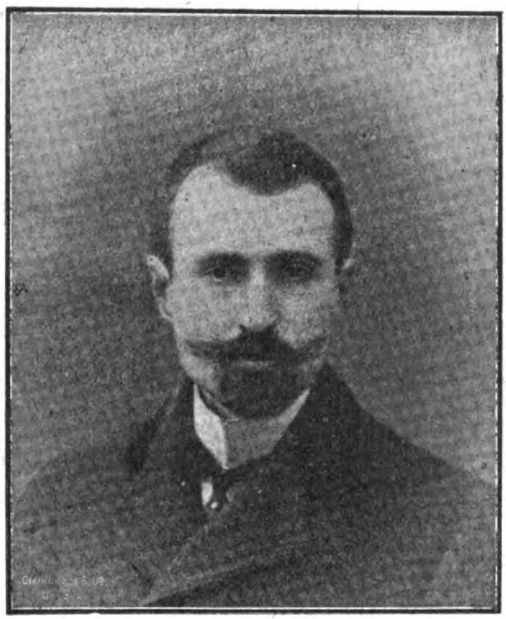
Io che ebbi la ventura di averlo prima allievo, poi amico fedele e carissimo, rare volte nella mia carriera mi sono incontrato con un giovane dall'ingegno così pronto, così audace, così pieno di iniziative. Si durava fatica a frenare la sua impazienza, il suo slancio mirabile ed a costringerlo ad uno studio ordinato e paziente. I libri — specialmente se tedeschi e voluminosi — non erano per lui; cominciati appena a sfogliare, egli si sentiva la forza di fare da sè; sia pure con qualche inciampo, ma libero l'ingegno e la fantasia! Quante discussioni, a volte vivacissime, coll'allievo ribelle; quante piccole collere, presto svanite senza lasciar la più piccola nube! E l'Orlando conservava di quel tempo trascorso a Messina un ricordo indelebile, affettuosissimo; e pei suoi professori, specialmente pel Bagnera, una venerazione sconfinata.

Ottenuta la laurea, passò un anno a Pisa ove, nel 1905, ottenne l'abilitazione all'insegnamento presso quella R.ª Scuola normale superiore; poscia, tornato a Messina, fu assistente per l'algebra e il calcolo e nel 1906 ottenne per titoli la libera docenza in fisica-matematica. Chiesto il collocamento in posizione ausiliaria, aveva sposato nell'ottobre 1906 una gentile signorina di Verona, la signora Alba Santi.

Trasferitosi a Roma, fu assistente di algebra e calcolo e esercitò la libera docenza dal 1908 al 1911. Ebbe l'incarico per vari anni dell'insegnamento della matematica nel R.° Istituto

Digitized by Google

superiore femminile di Magistero; fu direttore della Scuola militare aeronautica del battaglione specialisti del genio. In questi ultimi anni ogni suo pensiero, ogni sua energia, e anche la sua sostanza, tutto era stato assorbito dalla Società di incoraggiamento all'industria da lui fondata; e per essa aveva creata la rivista " Hermes „ e tenute conferenze in quasi tutta Italia. Lo animava una fede immensa del risultato finale dell'opera, certamente geniale, forse prematura; e come sempre non aveva esitato davanti ad alcun



sacrifizio per raggiungere un ideale che la guerra spezzò quasi sul nascere.

Aveva partecipato a vari concorsi universitari: a quello di meccanica razionale (Bologna, 1907), di fisica matematica (Pavia, 1913), di calcolo infinitesimale (Parma, 1912) e di analisi algebrica (Cagliari, 1913) e tutti non gli erano riusciti favorevoli. Nessuno dubitava del suo grande ingegno, della sua acutezza, della sua attività; pochi fidavano della sua efficacia didattica e dell'opera costante e ordinata che si deve spendere in un istituto d'istruzione superiore.

Nel concorso di Parma tuttavia, egli aveva dato una prova brillantissima nella lezione pratica cui erano stati chiamati tutti

Digitized by Google

i concorrenti; ed egli era riuscito secondo nella terna, a maggioranza. Ma quel concorso fu annullato, e nel nuovo, cambiata la Commissione, egli non fu nemmeno incluso nella terna.

La giovanile impazienza; l'apparente disordine del lavoro scientifico che appariva a volte frammentario e non sempre scevro da mende, e sopratutto il libero modo di giudicare, senza reticenze, crudamente e non sempre correttamente; non procuravano al povero Orlando molte e calde simpatie.

Chi lo conobbe a lungo e lo amò come figlio, conserva inalterata la fiducia che molti difetti si sarebbero emendati col tempo e quando egli avesse conquistata l'ambita posizione; e che l'Orlando, dal cuore nobile e generoso, dall'ingegno veramente superiore, avrebbe onorata la scienza e l'Università italiana!

***

Le pubblicazioni scientifiche dell'Orlando, uscite in poco più che un decennio, sono numerosissime.

Alcune hanno carattere sperimentale e contengono sempre acute, interessanti osservazioni sul giroscopio, sul rendimento dell'elica nel *vol plané*, sul problema degli equilibratori di un aeroplano; ecc. La maggior parte riguarda questioni di fisica-matematica (specialmente la teoria matematica dell'elasticità), di algebra, di calcolo, la teoria delle equazioni integrali, la formula integrale di Fourier, il problema di Hurwitz.

I lavori di statica elastica si occupano del problema del diedro, della lastra, del parallelepipedo rettangolo, del problema alterno dei solidi limitati da facce piane. Egli ha in parte applicato il metodo di integrazione di Betti-Cerruti; poi si è valso sagacemente del metodo delle immagini e di alcune funzioni ausiliari che sostituiscono vantaggiosamente le funzioni di Green (specialmente per rendere maggiormente convergenti le serie adoperate), dopo aver ridotto i così detti casi misti dell'equilibrio elastico per i solidi limitati da facce piane e quelli del parallelepipedo rettangolo alla integrazione della Δ_2 con date condizioni al contorno.

Questi lavori costituiscono una delle parti migliori dell'opera dell'Orlando.

Un ingegnoso procedimento di successive approssimazioni è applicato alla risoluzione del problema dell'induzione magnetica ed alla ricerca di un limite superiore del tono fondamentale di

Digitized by Google

una membrana vibrante e che si riscontra, in molti casi, più vantaggioso di altri noti.

Un altro gruppo notevole di lavori riguarda un argomento di cui l'Orlando si è occupato sempre con passione, fino a pochi mesi prima della morte; e cioè la teoria delle equazioni integrali. Egli ha ottenuto la risoluzione di alcune equazioni integrali con procedimento diretto; ha ricondotto elegantemente la integrazione dell'equazione di Riccati e quella di una equazione differenziale lineare di ordine n alla risoluzione effettiva di una equazione integrale tipo Volterra. In una memoria pubblicata nel 1908, l'Orlando ha per primo considerato il caso in cui il nucleo di una equazione di 2ª specie di Fredholm sia la somma di prodotti di una funzione della sola x per una della sola y; idea veramente felice e che fu poi successivamente sfruttata con pieno successo da Schmidt, Goursat, Lebesgue. L'Orlando si vale delle sue ricerche per trattare soltanto alcune classi di equazioni lineari.

Alcune osservazioni critiche del Pringsheim sulle condizioni di validità della formula integrale di Fourier, esposte nell'opera del Riemann-Weber, hanno dato origine a due pregevolissimi lavori; nel primo con acume e limpidezza egli dimostra le condizioni enunciate dal Pringsheim; e nel secondo egli dà una nuova e non molto restrittiva condizione sufficiente per la validità della formula integrale di Fourier.

Altro campo favorito dagli studi di Orlando, e che specialmente risente della potente influenza di Bagnera, è quello dell'algebra. Nei suoi primi lavori (era ancora studente) ha dato la caratteristica della matrice formata coi minori di un determinato ordine tratti da una matrice nota; una nuova dimostrazione del teorema di Capelli sulla caratteristica del determinante di Sylvester e una dimostrazione esplicita, rigorosa e didatticamente interessante sulla riduzione delle quadriche a forma canonica, citata con onore dal Capelli nelle sue classiche " Istituzioni di Analisi Algebrica „ pag. 320. Ma la parte veramente notevole di questa serie di ricerche è lo studio approfondito che l'Orlando fa del problema da lui detto di Hurwitz; cioè della ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti perchè le radici di un'equazione algebrica a coefficienti reali abbiano negativa le parte reale; problema presentatosi per la prima volta al Routh nella teoria della stabilità del movimento. L'Orlando

Digitized by Google

dimostra che la condizione necessaria e sufficiente è che la data equazione e la sua trasformata alle semisomme delle radici (che può facilmente ottenersi col metodo delle funzioni simmetriche) abbiano tutti i coefficienti positivi; riducendo così di molto i calcoli necessari alla applicazione della regola data da Hurwitz.

Nè vanno taciuti i suoi lavori sulla trasformata di Tschirnhausen, in cui dà una formula, che credo nuova, di una estrema eleganza.

Altri lavori di analisi completano sempre in qualche punto o semplificano proprietà già note o ne dànno dimostrazioni mirabili per eleganza e semplicità: valga citare per tutte una semplificazione del teorema di Arzelà sulla condizione necessaria e sufficiente per la integrazione di una serie, in cui egli rivela il suo acume critico, la non comune perizia per sviscerare le questioni le più delicate e ridurle ad un massimo di semplicità.

Pubblicò anche alcuni corsi litografati di algebra e calcolo riproducenti in parte le lezioni dettate all'Università di Roma e alla Scuola di aviazione; anche questi portano una impronta originale e recano sempre qualche non disprezzabile complemento a questioni note.

Nella rivista " Hermes „ aveva pubblicato pure non pochi articoli di propaganda per la Società da lui fondata o di indole tecnica.

Aveva conservato saldo e vivo il gusto delle buone letture e la sua cultura letteraria era notevolissima. Scriveva e parlava con eleganza, con gusto squisito; era inesauribile nei tratti di spirito, pronto alla risposta arguta e gioviale, che metteva a volte termine ad una discussione vivace. Rammento che una volta uno studioso pubblicò sul " Giornale d'Italia „ una poesia creduta inedita e attribuita a certo autore; il giorno dopo, l'Orlando avvertiva che quella poesia era di P. E. Imbriani e pubblicata negli scritti di lui!

Uno spirito eletto adunque in tutte le manifestazioni più alte dell'intelligenza; un'anima eroica spenta immaturamente per la grandezza della patria nostra, e certamente destinata a grandi cose. La sua memoria non sarà offuscata; i figli sappiano della grandezza del sacrificio da lui compiuto e della perdita che, insieme con loro, ha fatto la patria e la scienza!

Digitized by Google

PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE di L. ORLANDO

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. *Sulla deformazione di un triedro trirettangolo e di una lastra indefinita, elastici, isotropi* [t. 17, 335-352 (1903)].
2. *Sulla deformazione del suolo elastico isotropo* [t. 18, 311-317 (1904)].
3. *Sopra alcune funzioni analoghe alla funzione di Green per un parallelepipedo rettangolo* [t. 19, 62-65 (1905)].
4. *Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli, per tensioni superficiali date* [t. 19, 66-77. Nota addizionale, 78-80 (1905)].
5. *Sull'integrazione della* Δ_1 *in un parallelepipedo rettangolo* [t. 21, 316-318 (1906)].
6. *Un'applicazione analitica di un teorema di Fourier* [t. 21, 319-321 (1906)].
7. *Sull'integrazione della* Δ_2 *in un campo chiuso convesso* [t. 21, 342-344 (1906)].

Giornale di matematiche di Battaglini.

8. *Relazione fra i minori di ordine* p *d'una matrice quadrata di caratteristica* p [v. 40, 275-277 (1902)].
9. *Sulla riduzione delle quadriche a forma canonica* [v. 41, 222-224 (1903)].
10. *Sullo sviluppo della funzione* $(1 - z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{p-1}}$ [v. 41, 377-378 (1903)].
11. *Sull'equilibrio elastico di una lastra indefinita* [v. 42, 239-247 (1904)].
12. *Sulla funzione* n^{ma} *di Green per la sfera* [v. 42, 292-296 (1904)].
13. *Sulle equazioni integrali* [v. 46, 173-196 (1908)].
14. *Di alcune funzioni linearmente indipendenti* [v. 47, 369-370 (1909)].

Il Nuovo Cimento (s. 5).

15. *Sopra alcuni problemi di equilibrio elastico* [v. 7, 161-165 (1904)].
16. *Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli* [v. 7, 421-424 (1904)].

Digitized by Google

ATTI DELLA R. ACCADEMIA PELORITANA DI MESSINA.

17. *Sulla velocità minima nella traiettoria d'un grave* [v. 18, 28-31 (1902-1903); v. 20, fasc. I, 178-180 (1905-1906)].
18. *Sopra alcuni problemi di fisica-matematica* [v. 20, fasc. II, 1-51 (1905-1906)].
19. *Nuova applicazione della formula integrale di Fourier* [v. 22, fasc. I, 87-94 (1907)].

PERIODICO DI MATEMATICA (serie 3ª).

20. *Sull'equazione caratteristica della funzione* φ (m) *di Gauss* [v. 4, 134-136 (1907)].
21. *Sopra un noto invariante delle forme binarie di grado pari* [v. 4, 223-231 (1907)].
22. *Sullo sviluppo dei numeri equivalenti in frazioni continue* [v. 5, 38-42 (1908)].

BOLLETTINO DELLA SOCIETÀ AERONAUTICA ITALIANA.

23. *Sulla teoria del giroscopio* [anno 1908, fasc. n. 7].

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI (serie 5ª).

24. *Integrazione della* Δ_1 *fra due piani paralleli* [v. 14, 4-7 (1° sem. 1905)].
25. *Sopra alcune funzioni ausiliari* [v. 14, 138-143 (1° sem. 1905)].
26. *Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier* [v. 15, 205-208 (1° sem. 1906)].
27. *Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali* [v. 15, 266-269 (1° sem. 1906)].
28. *Sull'induzione magnetica* [v. 15, 416-419 (2° sem. 1906)].
29. *Nuove osservazioni sull'induzione magnetica* [v. 15, 767-771 (2° sem. 1906)].
30. *Sopra alcuni problemi di aerodinamica* [v. 16, 939 - 943 (1° sem. 1907)].
31. *Sull'equazione differenziale* $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ [v. 16, 244-248 (2° sem. 1907)].
32. *Sopra alcune equazioni integrali* [v. 16, 601-604 (2° sem. 1907)].
33. *Sulle equazioni differenziali lineari* [v. 17, 587-589 (1° sem. 1908)].
34. *Sul determinante di Wronski* [v. 17, 717-720 (1° sem. 1908)].
35. *Sulla formula integrale di Fourier* [v. 17, 367-371 (2° sem. 1908)].
36. *Sopra un brevetto Crocco relativo all'attacco delle ali di un aeroplano* [v. 18, 432-436 (1° sem. 1909)].

Digitized by Google

37. *Effetto dell'attacco elastico sul rollio di un aeroplano* [v. 18, 498-502 (1° sem. 1909)].
38. *Sull' equazione di Riccati* [v. 18, 575-577 (1° sem. 1909)].
39. *Modo di intensificare gli effetti dell' attacco elastico di un aeroplano* [v. 18, 668-672 (1° sem. 1909)].
40. *Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier* [v. 18, 343-348 (2° sem. 1909)].
41. *Sul problema di Hurwitz* [v. 19, 801-805 (1° sem. 1910)].
42. *Sulla caratteristica del risultante di Sylvester* [v. 19, 257-259 (2° sem. 1910)].
43. *Nuove osservazioni sul problema di Hurwitz* [v. 19, 317-321 (2° sem. 1910)].
44. *Sull'equazione alle semisomme e sul teorema di Hurwitz* [v. 19, 390-393 (2° sem. 1910)].
45. *Sopra alcune questioni relative al problema di Hurwitz* [v. 19, 430-434 (2° sem. 1910)].
46. *Sulle funzioni implicite* [v. 20, 667-670 (1° sem. 1911)].
47. *Sulla dimostrazione elementare del teorema di Hurwitz* [v. 20, 742-745 (1° sem. 1911)].
48. *Sulla sezione trasversale dei palloni dirigibili* [v. 20, 3-7 (2° sem. 1911)].
49. *Sull'integrabilità delle funzioni di due variabili* [v. 21, 330-331 (1° sem. 1912)]
50. *Sopra un teorema relativo agl' insiemi* [v. 21, 402-403 (1° sem. 1912)].
51. *Sopra una questione tecnica che si connette cogli integrali di Lebesgue* [v. 21, 438-440 (1° sem. 1912)].
52. *Sull'equazione alle potenze* [v. 21, 32-34 (2° sem. 1912)].
53. *Sulla trasformata di Tschirnhausen* [v. 21, 172-177 (2° sem. 1912)].
54. *Sopra un nuovo aspetto della formula integrale di Fourier* [v. 22, 65-66 (1° sem. 1913)],
55. *Sopra alcuni polinomi definiti, considerati da Hurwitz* [v. 22, 213-215 (1° sem. 1913)].
56. *Un problema di eliminazione* [v. 22, 367-368 (1° sem. 1913)].
57. *Un'osservazione sulle serie di potenze* [v. 22, 422-423 (1° semestre 1913)].
58. *Sulla permutabilità di due segni di limite* [v. 22, 415-417 (2° sem. 1913)].
59. *Sulle equazioni integrali* [v. 24, 1040-1041 (1° sem. 1915)].

Digitized by Google

ANNAES SCIENTIFICOS DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO.

60. *Quelques observations sur les groupes d'homographies dans un plan* [v. 6, 65-71 (1911)].
61. *Sur la continuité des séries* [v. 6, 188-190 (1911).
62. *Quelques observations nouvelles sur la continuité des séries* [v. 7, 97-98 (1912)].

MATHEMATISCHE ANNALEN.

63. *Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica* [Bd. 71, 233-245 (1911)].

ATTI DEL CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI IN ROMA (1908).

64. *Sulla risoluzione delle equazioni integrali* [v. 2, pag. 122-128].

PUBBLICAZIONI A PARTE.

65. *Note di matematica* — Messina, Trimarchi, 1902 (pagine 72).
66. *Relazione fra i minori di ordine* s *di un determinante di caratteristica* p — Id. id. id. (pag. 1).
67 *Esercizi di calcolo infinitesimale* — I. Id. id. 1903 (pag. 119).
68. *Sopra una speciale deformazione ausiliaria* — Caronia, 1904 (pag. 3).
69. *Sulle equazioni integrali* — Verona, Civelli, 1907.
70. *Corso di matematica ad uso del primo biennio di Facoltà* — Vol. I. Nozioni fondamentali di Algebra; pag. 123. Vol. II. Nozioni fondamentali di Analisi; pag. 172. (Corso litografato, Roma 1911, Assoc. Univer. Romana).
71. *Appendice al Corso di Matematica*, pag. 96 (Corso litografato, senza indicazione di editore).
72. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* Id. id.
73. *Corso di Matematica per la Scuola di areonautica presso il Battaglione Specialisti del Genio* (edito dal Ministero della Guerra). Fasc. I (1912); fasc. II (1913).

Digitized by Google

Ruggiero Torelli (1884-1915)

di FRANCESCO SEVERI

La tragica bufera che sconvolge l'Europa, le imperiose necessità d'una lotta in cui si tendono le volontà di milioni di uomini, sembrano oggi togliere ogni valore all'esistenza dei singoli, di fronte alle supreme esigenze di vita delle nazioni e alla difesa delle idealità, che per noi, e per i popoli che con noi lottano, costituiscon la base istessa della convivenza civile.

Tuttavia, scrivendo di Ruggiero Torelli, che mi fu caro discepolo, fin da quando a Pisa muoveva i primi passi nella scienza, l'animo mi s'empie di tristezza. È triste segnare la parola fine all'opera di chi ha vissuto nel lavoro tutta la sua lunga giornata: assai più triste troncar con la parola amara l'opera incompiuta di un giovane, che stava per cogliere i frutti migliori del suo ingegno.

Ruggiero Torelli nacque a Napoli, il 7 giugno 1884, da Gabriele e da Amalia Fergola. Nella famiglia stessa, col padre, professore di Calcolo infinitesimale e pregiato cultore di Analisi, e coll'avo materno, che fu il Senatore Emanuele Fergola, astronomo insigne dell'Università di Napoli, Egli trovò l'alimento primo per avviarsi a quegli studi che poi predilesse.

Compiuti a Palermo gli studi secondari, frequentò là il primo corso universitario, ed i corsi superiori a Pisa, avendo vinto, nell'Ottobre del 1901, un posto di studio gratuito presso quella Scuola normale superiore, celebrata palestra di alta cultura, ov'egli ebbe la ventura di trovar Maestri come il Dini, il Bertini, il Bianchi, il Maggi, il Pizzetti.

Attratto dagli studi di geometria algebrica, la sua mente si plasmò alle lucide Lezioni del prof. Bertini, sotto la guida del quale si laureò brillantemente in matematica, nel 1904, ottenendo, nel 1904-05, il posto di perfezionamento Lavagna presso la stessa Università e conseguendo più tardi (1906) il Diploma di Magistero dalla Scuola normale.

A Pisa — ov'io mi trovavo nel 1904 come assistente del prof. Bertini — ebbi occasione di conoscere il Torelli e, nelle

Digitized by Google

frequenti conversazioni con Lui, potei fin da allora apprezzarne le belle doti della mente e la bontà dell'animo; tanto che nel 1905 e nel 1907 lo volli mio assistente a Parma e a Padova. Nel 1908 il prof. BERTINI lo chiamò presso di sè come assistente e coadiutore nell'insegnamento, e poichè già fin dal 1909 il Torelli avea conseguito la libera docenza per titoli in geometria proiettiva e descrittiva, ed avea avuto ormai ampio modo di far apprezzare anche le sue eccellenti qualità didattiche, dal 1913 fu inoltre incaricato delle Applicazioni della Geometria descrittiva presso quella Scuola per gl'ingegneri.

*
* *

Le pubblicazioni del Torelli (1) toccano tutte argomenti di geometria algebrica. Lasciando in disparte la Memoria 11, in cui si applicano alle superficie monoidali noti criteri onde ricavare le eventuali falde unilatere delle superficie, dalla loro rappresentazione piana, e la Nota litografata 7, che contiene abbozzi di ricerche immature, per comodità di analisi, riunirò in tre gruppi i lavori di Lui.

Lavori sulle curve e varietà contenenti involuzioni o enti analoghi.

Nella Nota 1, che è la dissertazione di laurea del Torelli, Egli determina elegantemente a quali condizioni — necessarie e sufficienti — deve sottoporsi il gruppo di diramazione d'una retta doppia, perchè la corrispondente curva iperellittica possegga un'involuzione irrazionale di dato genere: nella Nota 9, appoggiandosi sulla nozione di " difetto d'equivalenza „ d'una serie di gruppi di punti sopra una curva, il quale è espresso dalla metà della differenza tra il numero dei punti doppi che la serie dovrebbe possedere per essere (a norma di un bel teorema di CASTELNUOVO) costituita da gruppi equivalenti, ed il numero di quelli che effettivamente possiede, il Torelli dimostra, per via geometrica semplice, il teorema di PICARD, secondo cui una curva di genere 2, la quale contenga un'involuzione ellittica, ne contiene necessariamente un'altra (2).

(1) Veggasi l'elenco completo alla fine.

(2) Una dimostrazione sintetica gruppale del teorema di PICARD — anzi di uno più generale di PICARD e POINCARÉ — era già stata data da CASTELNUOVO (Rendiconti dei Lincei, 1905).

Digitized by Google

La Nota 8 estende agli spazi doppi un teorema di DE FRANCHIS circa le condizioni d'esistenza d'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad un piano doppio; la Nota 6 porge una dimostrazione geometrica ingegnosa, che non esorbita dalle curve, del teorema di HUMBERT-CASTELNUOVO sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica (1);

la Nota 10, usufruendo ed allargando un po' noti criteri di equivalenza, assegna una condizione sufficiente, invero non molto espressiva, per l'esistenza di un fascio irrazionale sopra una varietà irregolare possedente un'involuzione ciclica regolare. Nella Nota 13 infine, con eleganti considerazioni geometriche, il Torelli perviene all'interessante teorema che *una superficie con due fasci ellittici di curve, in corrispondenza unirazionale tra loro, possiede in conseguenza infiniti altri fasci ellittici.* Un teorema analogo

(1) È noto che una dimostrazione geometrica dello stesso teorema, poggiata però sulla teoria delle superficie, era stata data in precedenza dal DE FRANCHIS (Rendiconti dei Lincei, 1903).

Digitized by Google

vale per le curve e varietà superiori (qualche caso particolare era già noto).

Lavori sui moduli di forme algebriche.

La Nota 2 arreca utili contributi alla questione della rappresentabilità di una forma algebrica, a quante si vogliano variabili, per combinazione lineare di più altre; non c'è grande originalità di metodo, ma è tuttavia degno di qualche rilievo, anche per la semplicità del procedimento, il teorema concernente la possibilità di rappresentare una forma di $r+1$ variabili, la quale passi s volte per una varietà V, senza parti multiple, completa intersezione di h ($\leq r$) altre forme, mediante un polinomio omogeneo di grado s nelle forme stesse; donde poi segue la postulazione della V per le forme che la debban contenere come s-pla (1).

La Memoria 12 (2) tratta della relazione tra le formole di postulazione di due varietà algebriche V, V', della loro varietà somma, e della varietà costituita dai loro punti comuni. La relazione stessa era stata oggetto di studi precedenti, ma non può dirsi che il Torelli realizzi progressi notevoli in proposito, giacchè il modo non opportuno di definire la varietà — ch'Egli indica con $V\,V'$ — formata dai punti comuni alle V, V', non fa che restringere la portata dei risultati in precedenza acquisiti e complica senza vantaggio le cose.

Poniamo infatti mente ad un caso semplice: il caso cioè di due curve gobbe irriducibili V, V', le quali si appoggino in certi punti P. Il Torelli, nella sua ricerca, considera di proposito ciascuno dei punti P semplicemente, astraendo dalle eventuali intersezioni infinitamente vicine, mentre, secondo lo spirito delle questioni algebriche, non si deve mai prescindere dalla molteplicità delle singole soluzioni (3).

(1) Per $h=2$, $r=3$, si ricade in una formola data per via diversa da NOETHER (Annali di Matematica, 1871).

(2) Alla Memoria è annesso un foglio volante a stampa, nel quale è rifatto il n. 9 del lavoro, contenente una dimostrazione inesatta.

(3) Nel caso in esame occorreva definire la molteplicità d'intersezione delle V, V', in ognuno dei P, o mediante la considerazione dei punti multipli infinitamente vicini, o mediante la proiezione generica sopra un piano o nel modo (sostanzialmente equivalente) da me indicato in una lettera al prof. BERTINI (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1908).

Digitized by Google

Lavori sulle serie algebriche di gruppi di punti sopra una curva o di curve sopra una superficie.

In questi lavori il tono delle ricerche si eleva sensibilmente e permette di meglio apprezzare le qualità dell'ingegno del Torelli.

La Nota 3 offre un'elegante e semplice dimostrazione della formola di JONQUIÈRES, che dà il numero dei gruppi di una serie lineare g_n^r, contenenti punti con molteplicità date. La dimostrazione si appoggia al principio di corrispondenza di CAYLEY-BRILL e, tenuto conto del significato funzionale di questo principio, rispetto al corpo delle funzioni razionali di un punto variabile sulla curva sostegno, porge l'interpretazione geometrica della formola numerativa.

Al lavoro precedente si può collegare la Nota 5, nella quale, sempre mediante l'uso ingegnoso e sistematico del principio di corrispondenza sopra una curva, il Torelli assegna *il numero dei gruppi di* $\rho + r$ *punti comuni ad una serie algebrica* ∞^δ, *d'indice qualunque* ν, *ed una serie lineare* ∞^r.

Quando, in particolare, la serie ∞^δ sia pur essa lineare ($\nu = 1$), si ricade in una formola già data da CASTELNUOVO, mediante il principio della conservazione del numero (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1889).

Un'altra applicazione ad una serie algebrica ∞^2, γ, permette al Torelli di calcolare il numero dei gruppi di γ con due punti doppi. Nell'espressione di questo numero, oltre al difetto d'equivalenza z della serie ∞^1 costituita dai gruppi di γ, che passan per un punto generico della curva, interviene un *nuovo carattere* Z, il quale si annulla allora e solo allora che i gruppi di γ siano equivalenti (nel qual caso è anche $z = 0$) oppure, quando un generico gruppo di γ abbia, entro la stessa serie, ∞^1 altri gruppi ad esso equivalenti (ed allora è $z > 0$).

Queste ricerche furono più tardi estese da E. S. ALLEN (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1914), il quale, profittando in varî punti dei concetti stessi che avevan guidato il Torelli, introdusse per una serie algebrica di dimensione qualunque, caratteri analoghi a z, Z, e mediante essi potè dare la formola di JONQUIÈRES per serie non lineari.

Un altro caso particolare della formola di JONQUIÈRES per serie ∞^2 non lineari, trovavasi già nella Nota 4, insieme ad un bel risultato concernente un sistema Σ, ∞^1, d'indice $\nu > 1$, di

Digitized by Google

curve C del genere p, tracciate sopra una superficie algebrica F. Se la generica curva del sistema non ha punti multipli, fuori dei σ punti base, e se inoltre due C si tagliano in n punti variabili, *il numero δ delle curve di Σ dotate di un nuovo punto doppio, non supera l'espressione* ν (n + σ + 4 p + I), *ove* I *è l'invariante di* Zeuthen-Segre *relativo ad* F. *Il massimo di δ è raggiunto allora e solo allora che le curve di Σ sieno equivalenti.*

È insomma l'estensione alle superficie di un notevole teorema di Castelnuovo, cui ho già avuto occasione di alludere. Ma l'estensione era tutt'altro che ovvia, occorrendo per essa concetti e strumenti completamente diversi.

La Memoria 16 — preceduta da una Nota riassuntiva ai Lincei — è uno studio approfondito di parecchie interessanti proprietà delle serie algebriche ∞^1 sopra una curva. Si può osservare che forse lo studio sarebbe riescito assai più agile coll'uso dello strumento trascendente, ma non si può tuttavia negare l'interesse degli sviluppi in esso contenuti, tanto più quando si guardi alle applicazioni — esposte in questo e nei lavori successivi — che ne fanno meglio scorgere lo spirito.

Così ad es. alla fine della Memoria 16 si trova *una condizione perchè un'involuzione* I, *non composta, sopra una curva* C, *sia ciclica e priva di coincidenze: occorre e basta perciò che su* C *esistano due gruppi non equivalenti di un egual numero di punti, composti con* I, *le cui immagini sieno equivalenti sopra una curva che rappresenti* I (cioè, come dice il Torelli, che i due gruppi non sieno « identicamente equivalenti » rispetto ad I).

Un teorema analogo vale per un'involuzione non composta I, sopra una superficie F: la I risulta ciclica e priva di coincidenze, allora e solo allora che su F esistono due curve, appartenenti ad I e non identicamente equivalenti, rispetto ad I. Ciò è provato nella Nota 17, ove il teorema vien applicato alla dimostrazione di un notevole criterio d'equivalenza per le curve d'una superficie F: *Se le curve* A, B *di* F *staccano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema continuo* ∞^1 Σ, *privo di punti multipli variabili, esse son equivalenti o differiscono per curve fondamentali di* Σ.

L'analisi che il Torelli fa di tale questione, intorno alla quale io, nelle mie ricerche sui criteri di equivalenza, avevo troppo rapidamente concluso, è insieme acuta, chiara e semplice.

Continuando l'ordine di ricerche iniziate nella Memoria 16,

Digitized by Google

il Torelli nella bella Nota 14 (Nota I) riesce a dimostrare, molto semplicemente, che *due curve di genere* p, *i cui integrali normali di I^a specie abbiano la stessa tabella di periodi normali, son birazionalmente equivalenti.* È strano che tale proprietà sia rimasta tanto tempo in ombra nella teoria delle funzioni algebriche, e che nel considerare, secondo spesso si suole, i periodi normali come *moduli* d'una curva, non ci si sia preoccupati di provare che realmente essi individuano la curva, a meno di trasformazioni birazionali! (1).

Le ricerche della Nota 14_1 vengon continuate nella 14_2, in cui si stabiliscon risultati di preparazione a ricerche ulteriori.

La breve Nota 15 è dedicata alle superficie che contengono un sistema lineare di curve prive di corrispondenze singolari: si dimostra che tali superficie son regolari, ma nè i concetti che ivi giuocano nè il risultato finale offron novità (2).

Nella Nota 18 (divisa in due: 18_1 e 18_2), che è l'ultima data alle stampe dal Torelli, Egli, partendo dalla classica rappresentazione di Hurwitz per le corrispondenze fra due curve C, $\bar{C}$, di genere p, scrive certe p^2 relazioni fra i periodi normali dei loro integrali di 1ª specie, le quali son sufficienti per l'identità birazionale delle C, $\bar{C}$. Non sembra tuttavia che sia agevole ricavarne le $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ relazioni riemanniane fra i periodi normali inerenti ad una curva di genere p (3), perchè nelle p^2 relazioni scritte dal Torelli figuran dei coefficienti interi vincolati alla lor volta, in modo non semplice, da altre relazioni e da una disuguaglianza. Comunque, la questione è posta così nel campo strettamente aritmetico.

La ricerca delle relazioni riemanniane era, negli ultimi

(1) Io avevo già provato la cosa *per le curve a moduli generali*, come corollario della proprietà seguente, che il Torelli, a sua volta, ritroverà nella Nota 18_2: Se due curve a moduli generali hanno la stessa varietà di Jacobi, son birazionalmente equivalenti. Ma la mia dimostrazione apparve soltanto più tardi in calce ad un lavoro del Comessatti (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1915).

(2) La proprietà trovavasi già (coll'inversa) in una mia Memoria (Math. Annalen, 1913) di cui il Torelli conosceva allora soltanto una Nota preventiva nei Comptes rendus (1913).

(3) Per $p = 4$ l'unica relazione riemanniana fra i periodi è stata scritta esplicitamente da Schottky (G. di Crelle, T. CII, 1888).

Digitized by Google

tempi, l'oggetto costante dei pensieri del Torelli. In una lettera diretta l'8 settembre, alla vigilia della morte, all'amico prof. CARLO ROSATI si leggon infatti queste parole: « Guarda se puoi scriver le relazioni di RIEMANN. Dal sistema dato in fine alla mia Nota I (la 18_1) se ne deduce facilmente uno lineare nelle h^*, g^*, H^*, G^* ». Povero Torelli! L'amore disinteressato alla scienza lo spingeva a spronare altri a far quello ch'Egli allora non poteva. Chissà che in quelle parole non sia il triste presagio della fine imminente!

Tuttavia, già dalle relazioni trovate, il Torelli riesce a trarre, nella Nota 18_2, varie interessanti conclusioni, fra le quali cito questa: *Se fra le varietà delle ϱ — ple dei punti di due curve di genere* p ($\varrho < p$), *intercede una corrispondenza birazionale, questa ne induce una analoga fra le due curve, e se la prima corrispondenza è singolare, tale è la seconda* (1).

Ciò che rende più interessante il risultato, è che per esso non occorre la genericità dei moduli, mentre quest'ipotesi (od altra pressochè equivalente) è necessaria appena sia $\varrho = p$.

*
* *

La produzione scientifica del Torelli gli aveva ormai valso un posto onorevole fra i giovani geometri italiani, e ben presto Egli avrebbe potuto salir degnamente, come insegnante ufficiale, una Cattedra universitaria. D'ingegno acuto e chiaro, non aveva certo nè grande rapidità d'intuizione, nè tormentosa feracità di fantasia geometrica. Era un lavoratore tranquillo e tenace, che voleva veder tutto lucidamente, senza salti arditi, ma che sapeva con calma sviscerar bene le più difficili questioni. Il suo pensiero scientifico s'andava ogni giorno di più elevando e maturando e prometteva frutti sempre migliori. Mente ordinata e chiara, coscienza scrupolosa ed onesta, non poteva non riescire insegnante ottimo: e tale Egli fu veramente.

La persona avea un po' tozza, l'incedere misurato, la fisionomia dolce e regolare, l'espressione pacata, gli occhi intelligenti e buoni. Ebbe vivi pei Maestri l'affetto e il sentimento della gratitudine, profumo gentile delle anime nobili.

(1) Per $\varrho = p - 1$, la cosa era stata dimostrata poco prima dal COMESSATTI (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1915).

Digitized by Google

Durante la nostra lunga e appassionata vigilia d'armi, sentì e comprese anch'Egli la dolorosa necessità della nostra guerra nazionale, e quando l'appello suonò, precursore dei sacrifici e degli eroismi, Egli accorse pieno d'entusiasmo, riprendendo nell'Esercito il grado di sergente di fanteria, col quale era stato congedato, dopo aver adempiuto (nel 1906 - 1907) all'obbligo di leva.

Richiamato il 24 maggio, partì lieto da Pisa, avendo il giorno prima consegnato al prof. Bertini il manoscritto dell'ultima Nota lincea.

Rimase a Romano, in quel di Vicenza, fino all'agosto, e passò poi col suo reggimento a Monfalcone, ove giunse in giorni di pericolo. Alla famiglia nascondeva di esser là; solo ad alcuni amici scriveva mostrando il suo entusiasmo per le gesta che sotto i suoi occhi vedeva compiere « dal nostro meraviglioso esercito » (1). Il suo superiore diretto, scrivendo al padre, ricorda che « gli affidava quasi ogni giorno incarichi di fiducia, nell'esecuzione dei quali impiegava buon volere e attenzione esemplari ».

Nei primi giorni di settembre si sentì indisposto, ma, dopo breve riposo, tornò volonteroso al servizio, pur confidando a qualche camerata di sapere d'esser affetto da incipiente cardiopalma. Non volle riferire la cosa ai superiori, parendogli suo dovere di restar là fino all'ultimo.

Il 9 settembre, recatosi in bicicletta a Ca' del Bosco, presso la sede del reggimento, dovette sostare la sera in un attendamento, sulla riva sinistra dell'Isonzo. Ivi si adagiò per riposare, sopra una carretta da battaglione, e su questa fu trovato all'indomani, addormentato nel sonno eterno. La paralisi che l'aspettava in agguato, lo ghermì senza neppur concedergli la bella morte davanti al nemico; ma il suo sacrificio resta non pertanto consacrato alla patria.

In un prato presso Monfalcone riposa la salma di Lui, fra i compagni caduti. Una croce col nome pietosamente distingue le sue

« ..... dalle infinite
Ossa che in terra e in mar semina morte ».

(1) Lettera 8 settembre all'amico prof. Rosati.

Digitized by Google

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI R. TORELLI

1905.

1. *Sulle involuzioni irrazionali nelle curve iperellittiche.* Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. XIX.

1906.

2. *Sopra certe estensioni del teorema di Noether* $Af + B\varphi$. Atti della R. Acc. di Torino, T. XLI, 1905 - 906.
3. *Dimostrazione di una formula di De Jonquières e suo significato geometrico.* Rend. del Circolo mat. di Palermo, T. XXI, 1906.

1907.

4. *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, T. XLII.

1908.

5. *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXVII.
6. *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti a una curva algebrica.* Ivi.

1909.

7. *Ricerche di geometria sopra una superficie algebrica.* Pisa, 1909 (fascicolo litografato).

1910.

8. *Sugli spazi doppi dotati di integrali semplici di I^a specie.* Rend. del R. Istituto Lombardo, II Ser., T. XLIII.

1911.

9. *Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica.* Rend. della R. Accademia di Napoli, 1911.
10. *Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica.* ivi.
11. *Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali.* Atti della R. Acc. di Napoli, II Ser., T. XIV.
12. *Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche.* Annali di Matematica, III Ser., T. XVIII.

Digitized by Google

1912.

13. *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, V Ser., T. XXI.

1913.

14. *Sulle varietà di Jacobi.* Due note. Ivi, Vol. XXII.
15. *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie regolari.* Ivi.

1914.

16. *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. XXXVII; Rend. della R. Acc. dei Lincei, Ser. V, T. XXII.
17. *Un criterio di equivalenza per le curve di una superficie algebrica.* Atti della R. Accademia di Torino, T. XLIX.

1915.

18. *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Due note. Rend. della R. Accademia dei Lincei, Ser. V, T. XXIV.

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le

Dr. J. H. Graf, *Professeur à l' Université de Berne*

III.

Correspondance entre L. Schläfli et F. Casorati, 1869-1890

Felice Casorati né le 17-XII-1835 à Pavia, † le 11-IX à Casteggio, était depuis 1857 Prof. extraord., depuis 1861 Prof. ord., de Mathématiques à l'Université de Pavia, et 1868-1875 en même temps prof. de Géodésie au R. Istituto Tecnico superiore de Milano, depuis 1882 un des XL et membre de la Reale Accademia dei Lincei à Roma et depuis 1882 du R. Istituto Lombardo à Milano; voir le nécrologies de E. Bertini, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo* tom. 25 et de G. Loria, *Bibliotheca Matematica* 1891, avec énumération de ses oeuvres.

Digitized by Google

Il formait un cercle spécial d'amis avec Brioschi, Cremona, Beltrami, Bertini auxquels s' associait aussi L. Schlaefli. Une amitié bien fondée et durable liait L. Schlaefli à Casorati et à sa famille entière, comme on verra par la correspondance qui contient, outre des développements mathématiques, des marques de la vie familière à laquelle était attaché l'ami L. Schlaefli de Berne.

Les lettres et cartes de F. Casorati sont très-nombreuses, tandis que nous possédons à Berne soulement des esquisses de lettres de L. Schlaefli à Casorati, mais qui sont d'une grande importance. La correspondance commença en 1869 par une lettre de L. Schlaefli et finit en 1890, l'année de la mort de F. Casorati, par une lettre de ce dernier.

N.° 1.

Gravedona, 24 Settembre 1869.

Ottimo Professore.

Vi sono riconoscentissimo della gentile e preziosa lettera del 1° Settembre. Mi duole di essere impegnato col prof. Cremona in parecchi lavori gravosi ed urgenti in guisa da non potermi occupare seriamente per ora del principio di Dirichlet, e trarre quindi profitto della vostra comunicazione.

Non volli tardare più oltre a rispondervi come che sia, poichè il silenzio sarebbe potuto parervi negligenza o ingratitudine.

Temo però che il *passo fatale* (1) (cioè se si possa o no ammettere l'esistenza di una funzione ragionevole [come dice Kronecker] che rende minimo l'integrale) rimanga ancora incerto.

Mi permetterete di scrivervi a lungo quando dovrò ritornare sul principio di Dirichlet.

Le persone di mia casa gradirono sommamente le vostre cortesi parole, il prof. Cremona ricambia i più affettuosi saluti, io vi rinnovo i ringraziamenti per l'onore e il piacere che colla vostra visita mi concedeste (2), e vi prego di conservarmi sempre la vostra preziosa benevolenza.

Vostro devotissimo

FELICE CASORATI.

(1) Se rapporte à un passage de l'ouvrage de F. Casorati: Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia 1868.

(2) Entre 1869 et 1871 L. Schläfli avait fait son séjour d'été avec F. Casorati et sa famille à Gravedona.

Digitized by Google

N.° 2.

Intra, Lago Maggiore, 30 Agosto 1871.

Ottimo Professore.

Ricevetti jeri le vostre cinque Memorie e ve ne ringrazio vivamente. Sono in Intra dal 15 Agosto e vi resterò sino a Novembre, facendo di quando in quando qualche gita per i monti e a Milano. Vi scrivo queste righe nella speranza che siate per intraprendere qualche viaggio verso l'Italia e che quindi possiate regalarmi un po' di giorni, come prometteste di fare partendo da Gravedona. Scendendo dal battello a vapore, chiedete del monastero Muller presso la parrocchia, il quale è di proprietà di certo sig. Sutermeister, da cui io ebbi l'appartamento che godo. Le persone di mia casa sono le medesime di Gravedona, e tutte si farebbero una festa di rivedervi.

Stringendovi con rispettoso affetto la mano, mi dico vostro devotissimo

FELICE CASORATI.

Se m'avviserete del vostro arrivo non accadrà ch'io sia in giro altrove (1).

N.° 3 (2).

Pregiatissimo Signore

Ella m'ha fatto l'onore d'inviarmi uno de' suoi lavori perch'io ne dica il mio parere. Approvo tutti suoi ragionamenti; essi saranno il principio di ulteriori conclusioni, che Ella pubblicherà continuando la disquisizione. Ammiro il di Lei andare incontro a tante difficoltà; e credo, che in seguito Ella porrà uguale ad 1 uno degli esponenti b_1, b_2, ..., b_m, per impedire la possibilità di continuare la serie indietro (oltre il primo termine).

Se fossero tutti quelli esponenti diversi da 1, la serie non avrebbe un cominciamento necessario, e senza dubbio la considerazione di una parte (con principio arbitrario) di una serie estesa verso ambedue lati all'infinito sarà molto più difficile di quella di una serie il cui primo termine è necessariamente primo

(1) Pendant le mois de Septembre 1871 L. Schläfli était l'hôte de L. Cremona à Paderno d'Adda, d'où il écrivit: Del nesso che vige tra l'analisi e l'intuizione geometrica, Rendiconti del R. Ist. Lomb., Vol. V, Fasc. V, 1872.

(2) Cette lettre de Schläfli sans date est l'esquisse d'une lettre à Casorati, écrite pendant l'année 1871.

Digitized by Google

termine. L'oggetto della Sua Memoria venne già trattato da Thomä (1) negli Annali di Matematica, sec. serie t. IV, p. 105. Mi permetta però di parlare di un'altra materia, che forse non è esaurita finora. Christoffel (2) negli Ann. di Mat. t. I, pag. 97, e Schwarz (3) nel giornale di Borchardt t. 70 pag. 114, hanno adoperato l'integrale

$$y = n \int (a_1 - x)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - x)^{\alpha_2 - 1} \dots (a_n - x)^{\alpha_n - 1} dx,$$

dove n significa una costante arbitraria, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono costanti reali ($a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$) e gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono costanti positive le quali soddisfanno alla condizione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n = n \quad 2,$$

per trasfigurare quella metà del piano rappresentativo di x, dove la componente immaginaria della x è positiva, conformemente nell'interno di un n-angolo (nel piano rappresentativo della y), i cui angoli hanno ordinatamente i valori $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2 \dots, \pi\alpha_n$, mentre rapporti dei lati dipendono solamente dai rapporti anarmonici da formarsi coi punti $a_1, a_2, \dots, a_n$ della retta di realità. Fra questi rapporti anarmonici ve ne sono $n - 3$ indipendenti fra loro, e fra i lati del n-angolo due sono determinati per i rimanenti con relazioni trigonometriche, quando gli angoli sono dati.

Ci sono dunque $n - 3$ variabili indipendenti e $n - 2$ funzioni di esse, non soggette ad una relazione lineare ed omogenea; ciascuna di queste funzioni è rappresentata da una integrale definito fra due punti susseguenti a_r, a_{r+1} della retta di realtà. Allo stesso tempo tutte le $n - 2$ funzioni formano probabilmente il completo sistema di integrali particolari di un sistema di $n - 3$ equazioni differenziali di secondo ordine, lineari ed omogenee in rispetto alla funzione e le sue derivate di primo e di secondo ordine. Questo sistema di equazioni differenziali avrà la proprietà particolare, che tutte le $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ derivate di second'ordine

(1) Thomae, Johannes Karl, Les séries Heinéennes supériores, Annali di Mat. IV, 1871.

(2) Christoffel, Elwin Bruno, Su un probl. proposto da Dirichlet, Annali di Mat. IV, 1871.

(3) Schawrz, Herm. Amandus, Ueber einige Abbildungs-Aufgaben, Journ. f. Math., LXX, 1869.

Digitized by Google

della funzione possono esprimersi linearmente ed omogeneamente nella funzione e le sue $n - 3$ derivate di prim'ordine, mediante le opportune derivazioni e combinazioni dell'equazioni del sistema; in fine sarà possibile, di eliminare tutte le derivate rispetto alle variabili indipendenti tranne una, di modo che ne risulti una sola equazione differenziale dello $(n-2)^{mo}$ ordine, lineare ed omogenea rispetto alla funzione e le sue derivate secondo una sola variabile indipendente; e questa equazione differenziale sarebbe allora quella di Pochhammer (Borch. 71, p. 340; 73, p. 136) (1). E poichè Pochhammer considera la funzione solamente qual una funzione di una sola variabile indipendente, ho detto che la materia in quistione non mi pare esaurita finora. Per $n = 3$ non c'è una variabile indipendente nel senso accennato, e risultano solamente le integrali di Euler (di prima specie), per $n = 4$ c'è una sola variabile indipendente, e risulta la serie ipergeometrica di Gauss. Per $n = 5$, cioè pel quinquangolo, vengo ad esporre quello che ho trovato e d'onde ho indovinato come potrebbe stare la cosa nel caso generale.

Siano $\pi\gamma$, (I) $\pi(\delta - \gamma)$, (II), $\Pi(1-\alpha)$, (III), $\Pi(1-\beta)$, (IV), $\Pi(\alpha+\beta-\delta+1)$, (V), $\pi\gamma$, (I). ... gli angoli ed i lati del quinquangolo secondo il loro ordine;

$$(\mathrm{I}) = M \int_0^1 t^{\gamma-1}(1-t)^{\delta-\gamma-1}(1-xt)^{-\alpha}(1-yt)^{-\beta}\,dt,$$

dove x, y dinotano le due variabili indipendenti, positive ed astrette alle condizioni $0 < y < x < 1$, mentre M significa una costante positiva (misura lineare). Sviluppando (I) secondo le potenze ed i prodotti delle x e y e ponendo

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y) = \sum\sum \frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\alpha+m)\,\Gamma(\beta+n)\,\Gamma(\gamma+m+n)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(\delta+m+n)}\,x^m y^n$$

$(m, n = 0, 1, \ldots)$ si ha $(\mathrm{I}) = M\,\dfrac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta-\gamma)}{\Gamma(\delta)}\,A(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y)$;

e giovandosi di A come di segno di funzione, si trova in simil guisa

(1) Pochhammer Leo, Ueber hypergeom. Functionen n-ter Ordn., Journ. f. Math., T. LXXI, 1870; Ueber Relationen zwischen hyperg. Integr. n-ter Ordn., Id. T. LXXIII, 1871.

Digitized by Google

$$(\mathrm{II}) = M\,\frac{\Gamma(\delta-\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\delta-\alpha-\gamma+1)}(1-x)^{\delta-\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta}\times$$

$$\times A\left(\beta,\ \delta-\alpha-\beta,\ \delta-\gamma,\ \delta-\alpha-\gamma+1,\ \frac{1-x}{1-y},\ 1-x\right),$$

$$(\mathrm{III}) = M\,\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\delta-\beta)}x^{\alpha+\beta-\delta}(1-x)^{\delta-\alpha-\gamma}(1-y)^{\alpha-1}(x-y)^{1-\alpha-\beta}\times$$

$$\times A\left(\delta-\alpha-\beta,\ 1-\gamma,\ 1-\alpha,\ 2-\alpha-\beta,\ \frac{x-y}{x(1-y)},\ \frac{x-y}{1-y}\right),$$

$$(\mathrm{IV}) = M\,\frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+2)}x^{\beta-1}y^{\alpha-\delta+1}(1-y)^{\delta-\gamma-1}(x-y)^{1-\alpha-\beta}\times$$

$$\times A\left(1-\gamma,\ \gamma-\delta+1,\ 1-\beta,\ \alpha-\delta+2,\ \frac{y}{x},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right),$$

$$(\mathrm{V}) = M\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-\delta+1)}x^{-\alpha}\,y^{\alpha-\delta+1}$$

$$A\left(\gamma-\delta+1,\ \alpha,\ \alpha+\beta-\delta+1,\ \alpha+\beta+\gamma-\delta+1,\ 1-y,\ \frac{x-y}{x}\right).$$

Eseguendo poi le operazioni

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha,\ y\frac{\partial}{\partial y}+\beta,\ x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\gamma,\ x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\delta-1$$

sulla serie $A(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y)$ e combinando i risultati in modo che si ottengano due espressioni per $A(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,x.y)$, e del pari due per $A(\alpha+1,\beta,\gamma+1,\delta)$, il paragone fornirà il sistema

$$(x-y)\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}-\beta\frac{\partial A}{\partial x}+\alpha\frac{\partial A}{\partial y}=0, \qquad (a)$$

$$(x-1)\left(x\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}\right)+$$

$$+\left((\alpha+\gamma+1)x-\delta\right)\frac{\partial A}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial A}{\partial y}+\alpha\gamma A=0. \qquad (b)$$

Calcolando

$$(x-1)\left(x\frac{\partial(a)}{\partial x}+y\frac{\partial(a)}{\partial y}\right)+\left((\gamma+1)x-\delta\right)(a)-(x-y)\frac{\partial(b)}{\partial y}+\beta \qquad (b)$$

Digitized by Google

si trova una terza equazione differenziale di second'ordine, contenente la derivata $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$, cosicchè ciascuna delle tre derivate di second'ordine può esprimersi linearmente ed omogeneamente in $A, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}$. Il sistema $((a), (b))$ però non ha più di tre integrali particolari indipendenti fra loro, e ne fornisce in forma di serie, sotto la supposizione $0 < y < x < 1$, le tre seguenti:

$$A(x, y) = A(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y),$$

$$B(x, y) = x^{-\alpha} y^{\alpha-\delta+1} A(\alpha, \gamma-\delta+1, \alpha+\beta-\delta+1, \alpha-\delta+2, \frac{y}{x}, y),$$

$$C(x, y) = x^{1-\delta} \ldots.$$

$$\ldots \Sigma\Sigma \frac{\Gamma(2-\delta)\,\Gamma(\gamma-\delta+1+m)\,\Gamma(\beta+n)\,\Gamma(\alpha-\delta+1+m-n)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\delta+1)\,\Gamma(\alpha-\delta+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(2-\delta+m-n)} x^m \left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

Per mezzo di queste tre integrali particolari A, B, C, i lati del quinquangolo esprimonsi come segue:

$$(\mathrm{I}) = M \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta-\gamma)}{\Gamma(\delta)} A,$$

$$(\mathrm{II}) = M \left\{ \frac{\Gamma(\delta-\gamma)\,\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1-\gamma)} A + \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\delta-1)}{\Gamma(\delta-\alpha)} C \right\},$$

$$(\mathrm{III}) = M \left\{ \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\delta-\alpha-1)}{\Gamma(\delta-\alpha-\beta)} B + \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha-\delta+1)}{\Gamma(2-\delta)} C \right\},$$

$$(\mathrm{IV}) = M \frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}{\Gamma(\alpha-\delta+2)} B,$$

$$(\mathrm{V}) = M \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\gamma-\delta+1)} A + \frac{\Gamma(\delta-\alpha-1)\,\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)}{\Gamma(\beta)} B + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(\delta-1)\,\Gamma(\alpha-\delta+1)}{\Gamma(\alpha)} C \right\}.$$

Si può domandare, s'egli sia sempre possibile di accomodare i valori delle x, y ad un dato quinquangolo. La risposta può conseguirsi mediante la formola

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} A & \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ B & \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \\ C & \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} \end{vmatrix} = (\delta-1)(\alpha-\delta+1)x^{\beta-\delta}y^{\alpha-\delta}(x-y)^{-\alpha-\beta} \times (1-x)^{\delta-\alpha-\gamma-1}(1-y)^{\delta-\beta-\gamma-1} \times$$

In tanto tempo che questa espressione nè si annulla nè diventa infinita, le differenziali $d\,M$, $d\,x$, $d\,y$ sono rappresentabili linearmente nelle differenziali di tre lati, per esempio nelle d (I), d (II), d (III). Ne segue che una perpetua approssimazione verso i dati valori dei tre lati è possibile sotto le medesime condizioni sotto le quali è possibile un quinquangolo i cui lati non si segano (cosicchè nessun lato diventa negativo).

N.° 4.

Gravedona, 28 Ottobre 1872.

Pregiatissimo Amico

Vi ringrazio delle due lettere per le quali io e tutti in casa fummo contenti di sapervi ritornato a Berna sano e salvo.

Il tempo ha continuato ad essere cattivo, facendomi così sentire più profondamente la mancanza della vostra cara compagnia.

Schwarz mi ha comunicato le considerazioni colle quali dimostra l'esistenza degli integrali abeliani, e mi pare ch'egli abbia asserito con tutta ragione.

" Es ist also das Dirichlet'sche Princip durch eine, wie ich glaube, strenge Beweismethode ersetzbar, welche für die Theorie der Abel'schen Integrale dasselbe leistet. was Riemann mit Hülfe dieses Principes hergeleitet hat. „ Volendo soltanto dimostrare quello che occorre nella memoria di Riemann *Theorie der Abel'schen Functionen* mi sembrerebbe sufficiente la seguente serie di cose:

a) Dimostrare che esiste una U entro un cerchio con valori dati sul contorno.

b) Far notare che ne segue l'esistenza di una U per qualunque superficie T (intendo sempre soltanto superficie riemanniane) la quale sia trasformabile conformemente in un cerchio.

Digitized by Google

c) Dimostrare coll'*altern. Verfahren* (1) che esiste una U anche per una T che risulti da due altre T_1, T_2 aventi un pezzo T^* comune.

d) Dimostrare che un triangolo con due lati rettilinei ed uno circolare Δ si può trasformare conformemente in un cerchio. Per *c*) e *d*) resta dimostrata anche la trasformabilità della seguente figura contornata da linee rette e da un cerchio.

e) Dimostrare che è trasformabile conformemente in un cerchio qualunque poligono rettilineo. Tracciando in una T qualunque i Querschnitte occorrenti per ridurla semplicemente connessa, la superficie risultante T' sarà appunto un poligono rettilineo, se i Querschnitte saranno tutti formati di porzioni di linee rette. E però questa superficie sarà trasformabile conformemente in un cerchio, e per essa resterà quindi dimostrata la esistenza di una U. Io riterrei i Querschnitte sempre formati di porzioni di linee rette, ed applicherei alla T' la dimostrazione esposta nella vostra lettera.

f) Il N. 1 della lettera di Schwarz.

Dalle cose che precedono segue esistere la U coi voluti moduli di periodicità e con dati valori sul contorno anche per qualunque superficie riemanniana, da un cui strato sia stato staccato un cerchio, quale è la T_1 nel N.° 3 della lettera di Schwarz. Imperocchè esiste una siffatta U pel caso che il contorno sia un poligono 222... (invece della circonferenza L_1), ed a questo caso ed alla figura contornata da L_1 e L_3 si applica l'alternirendes Verfahren.

g) Il N.° 2 della citata lettera.

h) I N.° 3, 4, 5.

Vi mando l'essenziale della lettera di Schwarz, affinchè abbiate anche voi tutte le comunicazioni che ebbi io; ed anche possiate con tutto comodo, se non vi dispiace, favorirmi il vostro parere sopra l'opportunità della esposta serie *a*)... *h*) di cose per lo scopo di porgere ai lettori del futuro 2° volume della mia *Teorica d. f. d. v. c.* anche tutto il contenuto nella *Theorie d. A. F.* di Riemann.

Per *d*) vorrei spendere poche parole; ma non so finora come mi converrà di fare. Se avrete da suggerirmi qualche cosa per questo punto, ne avrò piacere.

(1) Schwarz, Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren, Viertel. d. Zürch. Naturf. Ger. T. XV, 1870.

Digitized by Google

Scrivo anche a Schwarz per dirgli che le sue dimostrazioni mi pajono persuasive, e per fargli conoscere il suesposto ordine di cose, e fargli qualche domanda.

Partirò da Gravedona il 2 Novembre. Aggradite i rispetti affettuosi di tutta la mia casa ed in particolare una tenerissima stretta di mano del vostro devotissimo

F. Casorati.

Se avrò detto degli spropositi anche grossi, come può darsi, spero che voi mi correggerete senza complimenti.

N.° 5.

Milano, 27 Dicembre 1872.

Carissimo Amico

Ho ricevuto 7 vostre lettere (18 Nov., la 2ª senza data, 8 Dic., 13 Dic., 14 Dic., 15 Dic., 23 Dic.); e fu mia fortuna che la 2ª siami giunta insieme colla 3ª, altrimenti sarei stato inquieto per la vostra salute.

Ho consegnato già da tempo allo stampatore il vostro manoscritto *sulle linee lungo le quali il valor assoluto di una funz. è costante.* Verrà in luce col prossimo fascicolo.

Anch'io, ritornato a Milano-Pavia, fui sopraffatto da molte faccende, che mi impedirono di pensare ai lavori di Schwarz. Ma con queste feste comincio ad aver tempo; e le vostre lettere ed una di Schwarz mi sono grande sprone allo studio. Finora non posso scrivervi nulla di consistente sulle medesime; vi scriverò tosto che le avrò digerite. Per ora mi limito ad accusarvi ricevuta delle lettere, a ringraziarvi, ed a correggere una svista che commisi nello scrivere sì a voi che a Schwarz alla fine di Ottobre, la quale consiste nell'aver messo sotto il capo *d*) invece che sotto il capo *f*) l'osservazione " Per *c*), *d*) [pei capi precedenti] resta dimostrata anche la trasformabilità della figura ★ doppiamente connessa, contornata da linee rette e da un cerchio. „

Schwarz deduce la possibilità di integrare $\Delta = 0$ entro il triangolo del capo *d*) dalla possibilità di integrarla per un triangolo a lati circolari con due angoli retti (nella p. 772 del Monatsb. (1) 10 Ottobre 1870).

I miei di casa vi ringraziano di vero cuore della vostra benevola memoria, e mi incaricano di unire ai miei anche i loro fervidi augurj di prosperità pel nuovo anno.

(1) Schwarz, Monatsberichte der Berliner Akademie.

Digitized by Google

Io poi sento anche il dovere di dirvi, che, pregandovi del vostro parere sulla mia lettera della fine d'ottobre, non intendevo di impegnarvi a rispondere entro breve tempo, con pericolo di disagio da parte vostra. L'urgenza sarebbe affatto inopportuna in simili cose; e con voi, tanto buono e delicato, io mi guarderei bene dal commettere indiscrezioni.

Col desiderio di potervi scrivere presto il risultato dello studio delle vostre lettere, e colla preghiera di amarmi sempre egualmente mi dichiaro

il vostro amantissimo

F. Casorati.

Avevo visto già in Gravedona che il caso della superficie riemanniana ridotta semplicemente connessa porge i lati a due a due paralleli; ma pensavo di passare dal caso dei lati non paralleli al caso dei paralleli mediante l'*alternir. Verfahren* (1). Ora però sono molto più contento di avere la vostra nuova dimostrazione.

N.° 6.

15 Giugno 1873.

Ottimo Amico

Che andavate pensando del mio stranamente lungo silenzio, successo al vostro premuroso ed oltremodo prezioso carteggio? Avrei voluto scrivervi già moltissime volte; ma ho sempre differito nella speranza, in verità piuttosto cieca che ragionevole, di potermi nuovamente rinchiudere nel principio di Dirichlet, almeno per qualche settimana; ed ho sempre fatto larghissimo assegnamento sulla indulgentissima vostra bontà, proprio degna della vostra mente.

In Gennaio avevo principiato infatti il concentramento nel detto studio, contento assai in particolar modo dell'aiuto portomi dalle vostre lettere; ma l'Istitut. tecn. superiore mi preparava nuove distrazioni, mentre i benedetti interessi domestici ed il cresciuto numero delle lezioni invernali a Pavia (per voler mio del resto) e la fiacchezza sconfortante, che sempre più mi affliggeva, scemavano enormemente la già sempre scarsa attività

(1) V. la première note de la lettre N.° 4.

Digitized by Google

della mia testa. Mi lasciai insomma indurre ad intraprendere uno studio della termodinamica per preparare un semestre di lezioni pel prossimo anno scolastico, che io farò invece del professore di meccanica industriale; il quale, assorbito ognora più dalle intraprese industriali, va scostandosi dagli studi e minaccia di cessare affatto fra non molto dall'insegnamento.

Quest'anno è stato assai poco propizio alla matematica pura in Milano: Brioschi tutto dentro in una *Banca di costruzioni*; Cremona spessissimo in giro per Italia, principalmente come membro di una commissione d'inchiesta per l'istruzione secondaria, e distratto persino in un passionatissimo noviziato nel *velocipedismo*.

Ho finito testè di correggere le prove della vostra memoria *sulle linee lungo le quali il valor ass. di una funz. è costante*, che avevo creduto che si stampasse nel 4° fascicolo del tomo V e che invece si stamperà nel 1° del VI. Le ultime prove verranno, già s'intende, spedite a voi. E del lavoro sulla trasformazione conforme di un poligono in un mezzo piano che cosa credereste di fare? L'inserzione nel mio 2° volume avverrà, come ora vedete, chi sa quando.

Con quanto giubilo io e tutti i miei saluteremmo il giorno di rivedervi! E chi sa che, ad onta della presente improbabilità, non si riesca a stare un poco assieme anche quest'anno. Avrei destinato il Settembre all'Esposizione di Vienna e l'Ottobre a Roma, dove si apre il 5 di quel mese l'XI congresso degli scienziati italiani. Nel Luglio andrò con l'Eugenia e la Bianca a Sestri-Ponente presso Genova, dove si trova già la sig.ª Vistarini e dove si porterà poi fors'anche la madre delle ragazze; tutti per bagni. Ma devo ritornare alla fine di Luglio per compiere gli esami a Pavia ed a Milano. Però, se nell'Agosto mi restasse il tempo di fare un po' di campagna, ve lo scriverei, colla speranza che la simpatia per noi e per la vita campagnola avesse la virtù di farvi passare le Alpi come negli scorsi anni.

Aggradite intanto i saluti della sig.ª Vistarini, di mia zia, delle ragazzine, che tutte quattro vi ricordano proprio spessissimo con riverente affetto; ed accogliete anche i rispetti dell'Adelaide; ed accogliete infine con sempre eguale bontà l'attestazione della stima e dell'affetto del

vostro devotissimo

F. Casorati.

Digitized by Google

N.° 7.

Milano, 16 Settembre 1873.

Ottimo amico

Parto per Gravedona. Più presto verrete a raggiungermi, più grato ve ne sarò. Se mi farete sapere il dì dell' arrivo, sarò a ricevervi al battello; pel caso contrario v' avverto che presi la casa della sig.ª Dubini nella via che mena alla parrocchia.

Con una stretta cordialissima sono il

vostro CASORATI.

N.° 8.

Pavia, 28 Aprile 1874.

Ottimo amico

Tardi ma di cuore vi ringrazio dei ritratti che mi avete regalato.

In questo frattempo ho letto, piuttostochè studiato, cose assai variate, più di fisica che di matematica pura. Adesso sto per principiare lo studio della Natural Philosophy di Thomson e Tait, che avrete visto essere stata tradotta in tedesco per cura di Wertheim ed Helmholtz. L'astronomo Schiaparelli m'assicura che è un' opera veramente insigne, di cui va vivamente desiderata la continuazione.

Verso la fine di maggio potrei essere pregato di dire qualche cosa sul valore delle due memorie dell' Ascoli (1) sulle serie trigonometriche: Ueber trigon. Reihen. VI Band. 2. Heft. Annalen Clebsch und. Sulla serie di Fourier, Tomo VI, Fasc. 1.° Annali Brioschi e Cremona; essendo egli tra gli aspiranti all' insegnamento della matematica nel liceo Parini di Milano. Io potrei anche declinare questa briga; ma farei certamente cosa assai grata al provveditore agli studi in Milano ed utile al liceo, se potessi dichiarare, che, non avendo avuto l' agio di studiare queste memorie, posso però addurne il giudizio di un matematico assai più competente di me. Se voi dunque le aveste guardate, ciò che parmi probabile, riflettendo ai vostri studi sul loro argomento, vi pregherei di farmi conoscere la impressione ritrattane.

Conto di passare a Gravedona almeno il Settembre e l'Ottobre. In tal caso spero che voi mi regalerete la vostra cara compagnia.

(1) Ascoli Giulio, né à Trieste 20 Nov. 1843, † à Milan le 12 Juillet 1896, depuis 1882 prof. à l'Ist. tec. sup. de Milan.

Digitized by Google

La sig.ª Vistarini, mia zia e le cuginette vi nominano sempre, e desiderano di rivedervi, e m' incaricano di salutarvi con vero affetto. Anche l' Adelaide mi prega di porgervi i suoi rispetti.

Mi è caro sperare che sarete stato sempre bene, e che vorrete sempre bene al

vostro amantissimo

F. Casorati.

La busta di questa lettera è sconcertata, per averla io riaperta.

N.° 9.

Gravedona, 11 Agosto 1874.

Ottimo amico

Come vedete, sono in Gravedona e penso di restarci sino alla fine di Ottobre. L' anno passato siete venuto circa il 20 Settembre, perchè sino alla metà io non ero qui; ma quest' anno posso pregarvi di venire più presto, cioè per il principio di detto mese; pel qual tempo la vostra camera sarà vuota, e vi chiamerà insieme con noi giorno e notte. Se verrete, faremo alcune gite per valli e monti un po' più lunghe delle nostre solite passeggiate: una p. e. nell' Engadina.

Aggradite i saluti della sig.ª Vistarini e delle ragazzine, annunziateci presto la vostra venuta, ed amate sempre

il vostro amantissimo

F. Casorati.

N.° 10.

Milano, 5 Dicembre 1874.

Ottimo amico

Ricevetti in tempo debito la vostra lettera, in cui narravate il felice ritorno, e ne fummo tutti tranquillati.

Le lezioni ed altri affari m' hanno assorbito quasi tutto il Novembre. Tuttavia non ho tralasciato del tutto le ricerche sulle equazioni differenziali, che proseguirò con maggior lena, spero, fra breve e per lungo tempo. Prima, ancora, devo occuparmi della serie di Fourier per le conferenze in Pavia. L' articolo, che su di essa volevate stampare col programma universitario, l'avete stampato? Se sì, mi fareste piacere regalandomene presto una copia.

Digitized by Google

Riguardo all'argomento, sopra nominato, delle equaz. diff., ho guardato le prime pagine della memoria *Ueber alg. Diff. gleichungen erster Ordnung*, pubblicata dal sig. Rosanes (1) nei Math. Annalen III. Band 4. Heft. (2), e sarei curioso di sapere, se voi ritenete *necessario* di dimostrare per via algebrica, come egli fa, che se l'integrale *generale* della $A\,dx + B\,dy = 0$ è algebrico, esso deve potersi mettere sotto la forma $R =$ Const. (pag. 536). Io non sento questa necessità; ben'inteso, pensando ai lettori (quali devono essere quelli degli Ann.) già padroni degli elementi della teoria delle equaz. differenziali, cioè, per esempio, delle lezioni 22ª e 26ª del *Calcul intégral* edito dal Moigno. A me parrebbe, che, trattandosi della suindicata equazione, anzi dirò a dirittura, trattandosi di una equazione della forma

$$A_0\,dy^n - A_1\,dy^{n-1}dx + \ldots\ldots + A_n\,dx^n = 0 \qquad (1)$$

razionale in x, y, si possa conchiudere, non soltanto la *Verallgemeinerung* (pag. 536), ma altresì che $R(x, y,$ Const.) dev'essere di grado n rispetto alla Const., in forza del semplice riflesso geometrico, che, per ogni punto del piano si può principiare secondo n direzioni a tracciare una linea dotata della proprietà (1), e quindi nella equazione $R(x, y,$ Const.$) = 0$ ad ogni coppia di valori x, y, devono corrispondere n valori della Const. Mi pare che così la pensino molti scrittori, quand'anche non abbiano esplicitamente enunciata una tale conclusione. Avrei piacere, ripeto, di sapere in confidenza come la pensate voi, con tutto vostro comodo.

La sig.ª Gigi e l'Eugenia e la Bianca parlano spessissimo della vostra bontà, e vorrebbero avervi insieme, non soltanto d'autunno, ma anche nelle altre stagioni. Io sono molto d'accordo con loro in tale desiderio, e intanto faccio voti affinchè vi conserviate robusto come siete, e vi mando una cordialissima stretta di mano.

Vostro F. Casorati.

(Continua)

(1) Rosanes Jacob, nè le 16 Août 1842 à Brody (Galicie), depuis 1876 prof. à l'Univ. de Breslau.

(2) Ueber alg. Differentialgleichungen 1 Ordn.

Digitized by Google

Geometria superiore.

F. Caldarera, *Introduzione allo studio della geometria superiore.* Volume Primo, Palermo, Tip. Lao, 1882. 8° p. V-624, con 101 Fig. su otto tav. lit.

Mentre questo *Bollettino*, per il fine " bibliografico " che si propone, deve segnalare le pubblicazioni matematiche recenti, grazie allo scopo " storico " che possiede è tenuto ad andare in traccia delle opere che corrono il rischio di andare del tutto dimenticate. In tale condizione si trova quella a cui è dedicata il presente articolo, la quale, quantunque fatta conoscere nelle sue linee generali agli scienziati che si riunirono a congresso a Palermo nell'Agosto 1875, ebbe mediocre notorietà e scarsa diffusione, forse perchè non poteva servire come libro di testo in alcuna scuola e non ebbe l'ausilio di una benintesa *réclame*, da parte d'un abile editore.

Il presente cenno non ha la stolta pretesa di vincere l'indifferenza del pubblico matematico; esso, piuttosto, rappresenta un doveroso omaggio verso il coscienzioso insegnante, il quale, raggiunto il novantesimo anno d'età, spontaneamente volle scendere dalla cattedra da lui illustrata, non per l'impossibilità di occuparla ancora, degnamente, ma perchè potessero assidervisi altri più giovani di lui.

Gli epiteti *sublime, superiore, moderno* furono applicati a varie teorie matematiche e sempre in via transitoria, chè il progresso incessante della scienza indusse ad applicarle successivamente alle ultime trovate, al modo stesso che gli aggettivi *nuova, nuovissima*, ecc. applicate a strade e piazze di recente costruzione vennero abbandonati coll'estendersi delle città. Tuttavia, mezzo secolo fa al nome di " Geometria superiore " in generale si dava il significato attribuitogli da M. Chasles in una delle più note fra le sue opere, si usava, cioè, per indicare il complesso delle teorie che rampollano dal concetto di " doppio rapporto ". Che tale fosse il senso attribuitovi anche dal prof. Caldarera è difficile possa asserire chi esamini il presente volume (unico pubblicato dell'opera progettata); chè dei sette lunghi capitoli che lo formano i due primi appartengono a quella che può designarsi come " geometria complementare " (rispetto alla elementare), mentre

Digitized by Google

gli altri abbracciano sviluppi relativi a quel gruppo di teorie che Cauchy ha adunate sotto il nome di " analisi algebrica „.

Quei due capitoli sono intitolati uno *Sulla planimetria,* l'altro *Sulla stereometria*; essi procedono fra loro parallelamente; nell'uno si parla largamente di poligoni piani, nell'altro di poliedri (in particolare di quelli dotati di parziale o totale regolarità); nell'uno di coordinate cartesiane nel piano, nell'altro di coordinate cartesiane nello spazio; nell'uno di aree, nell'altro di volumi; ecc. Probabilmente vennero pensati e scritti quando l'autore insegnava matematiche superiori nell'Istituto tecnico di Palermo e lo studio di essi va ancor oggi consigliato appunto a chi oggi insegna in una siffatta scuola.

Degli altri cinque Capitoli quelli che portano i numeri III e IV insegnano la successiva generalizzazione che ricevette l'idea di numero onde rendere effettuabili certe operazioni altrimenti impossibili. Sopra tale estensione riposa il concetto di funzione che nel Cap. V viene stabilito e nei due seguenti applicato allo studio delle funzioni di uso più frequente, cioè le potenze, le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. L'esposizione è ispirata alle opere classiche sull'argomento; ma nell'orditura generale e quà e là nei particolari l'opera presenta delle innovazioni che, specie al suo apparire, dovevano sembrare degne di nota. Essa, quindi, prende degnamente posto fra le altre opere didattiche del venerando autore, delle quali il *Bollettino* ebbe ad occuparsi con lode in parecchie occasioni. G. L.

Teoria degli insiemi

J. König. *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre.* Leipzig, Veit, 1914: 8°. p. VIII + 259 (col ritratto dell'autore).

Questo libro, denso di idee e più filosofico che matematico, è di assai difficile lettura: e la difficoltà è aggravata dalla profusione di simboli e dalla eccessiva parsimonia di esemplificazioni. Noi ci limiteremo qui a pochi cenni, per non avventurarci in profonde discussioni sopra un terreno sul quale non ci sentiamo abbastanza sicuri, e che forse non è egualmente famigliare a tutti i lettori del *Bollettino.*

Dopo avere introdotto con scrupolosa accuratezza i concetti di *aggregato,* di *ordine* e di *equivalenza,* l'autore stabilisce il *principio d'induzione completa,* che costituisce per lui una legge

Digitized by Google

generale intuitiva. Viene poi a considerare i legami (*forme logiche fondamentali*) che possono esistere tra due fatti (*Ergebnisse*): *isologia*, *congiunzione*, *disgiunzione*, *implicazione*, *equipollenza*; e stabilisce il concetto di *verità*, che è sempre relativo ad un determinato *campo di idee*. *I principii della deduzione logica* permettono di ottenere da date forme logiche altre nuove forme. Il campo delle forme logiche costituisce il campo di idee della logica pura; ed è interessante la questione di dimostrare che tale campo non implica alcuna contraddizione. Al campo considerato appartiene, come legge intuitiva, *il principio di contraddizione*, o l'equivalente *principio del terzo escluso*.

A questo punto l'autore ritorna sul concetto di aggregato per precisarlo in modo definitivo, e per definire in particolare gli *aggregati di Cantor* e quelli più speciali *di Zermelo*; e mostra che per questi ultimi il *principio di scelta* appare come una proposizione esistenziale intuitiva.

Entriamo ora finalmente nel campo puramente matematico. Introdotte le due forme $x + y$ (*somma aritmetica*) e xy *prodotto aritmetico*), e stabilito un certo sistema di assiomi, l'autore fa vedere che il campo così definito non è contraddittorio, e deduce le leggi delle operazioni aritmetiche. Coll'aritmetica si connette strettamente la teoria degli aggregati finiti. Si presenta poi spontaneo lo studio dell'insieme e della successione dei numeri naturali, che conduce alle definizioni di *aggregato infinito* in generale, di *aggregato numerabile* e di *serie ben ordinata*; dalle proprietà degli aggregati numerabili segue che l'insieme dei numeri razionali (definiti come coppie ordinate di numeri interi) è numerabile. Col nome di *continuo* viene designato l'insieme di tutti gli aggregati parziali contenuti nell'aggregato dei numeri naturali; se a ciascun elemento appartenente ad uno di tali aggregati si fa corrispondere la cifra 1 e ad ogni altro elemento la cifra 0, si viene a far corrispondere a ciascun aggregato parziale una frazione binaria (cioè un'espressione della forma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ dove i numeri a_i possono prendere i soli valori 0, 1), e si giunge così alla teoria dei numeri reali. Segue l'esposizione dei teoremi fondamentali della teoria degli aggregati, che dà occasione a discutere le antinomie che in questa teoria si vollero trovare; i procedimenti rigorosamente logici seguiti dall'autore gli permettono di farne una minuta analisi e di riconoscere che esse si

Digitized by Google

fondano tutte su qualche errore di logica. L'opera finisce con un capitolo, rimasto purtroppo incompiuto per la morte dell'autore, sui numeri ordinali e sull'ordinabilità del continuo.

G. VIVANTI.

Figura dei Pianeti.

P. PIZZETTI. *Principi della Teoria meccanica della Figura dei Pianeti.* 8° pag. XIII + 251. Pisa, Spoerri, 1913.

Fra i vari campi nei quali l'Analisi Matematica trova utili e feconde applicazioni, ritraendo a sua volta, dai bisogni di questa, stimolo ad arricchirsi di novelle risorse, occupa senza dubbio uno dei posti più cospicui la Teoria meccanica della figura dei pianeti.

La ricerca infatti di leggi meccaniche atte a spiegare la forma dei pianeti, quale è indicata da osservazioni astronomiche e geodetiche, suggerì quasi spontaneamente a gli analisti nuove questioni, richiedenti, per essere affrontate, che l'analisi si arricchisse di nuovi strumenti e ponesse a duro cimento le sue risorse. Può dirsi anzi che gli argomenti che hanno attinenza con la ricerca in parola formarono oggetto degli studi più ardui da parte degli uomini più illustri che abbiano onorato le scienze matematiche. Questo peculiare carattere della teoria meccanica della figura dei pianeti, aggiunto, ben si intende, a la capitale importanza che tale teoria ha sempre avuto per sè stessa, ha, come naturale conseguenza, che ogni libro dedicato ad essa attiri in modo particolare la attenzione degli studiosi, e ciò tanto più se si tratti di opera veramente egregia come quella del prof. Pizzetti.

Come nota l'A. stesso, nella prefazione, egli volle dare al suo libro carattere particolarmente didattico, astenendosi così da l'entrare in esso in dettagli circa quelle ricerche che, pur presentando sommo interesse, non raggiunsero ancora un tale grado di sicurezza da potersi convenientemente introdurre appunto in un libro di carattere didattico. Così pure l'A. stesso opportunamente dichiara di avere, nella distribuzione della materia, sacrificato ad esigenze logiche l'ordine storico secondo il quale si succedettero le varie teorie da lui esposte.

Digitized by Google

Altro particolare che contribuisce notevolmente a rendere molto interessante l'opera si è quello che essa contiene, opportunamente riassunte al debito posto, ricerche originali dell'A. da lui pubblicate in passato in vari lavori.

Il prof. Pizzetti incomincia il suo libro con un primo capitolo dedicato a le generalità su le superficie di equilibrio e le loro proprietà. Ottima è l'idea che ebbe l'A. di richiamare qui la attenzione dello studioso su la circostanza che le ricerche attinenti a la teoria meccanica della figura dei pianeti possono distinguersi in due categorie: a seconda rispettivamente che le ricerche stesse si riferiscono a lo studio delle superficie di equilibrio (relativo) e delle relazioni che ha con esse la attrazione esercitata dal pianeta a l'esterno, oppure a lo studio delle forme di equilibrio (relativo) di un pianeta in rapporto a date ipotesi circa la distribuzione della densità al suo interno, presupposta una fluidità totale o parziale del pianeta stesso. Le ricerche del primo gruppo interessano sopratutto la Geodesia e la Astronomia: è quindi naturale che l'A. illustre geodeta, abbia, come egli stesso disse nella prefazione, data grandissima importanza a queste ricerche, tanto da averne trattato con sviluppo un po' maggiore di quel che non abbia fatto con quelle del secondo dei gruppi accennati, le quali hanno più diretta attinenza con la Fisica Matematica, la Cosmogonia ecc. Nel capitolo in parola è notevole sopra tutto il calcolo del contributo (e del limite superiore di questo) che i corpi celesti arrecano a le componenti dalla gravità. Da segnalarsi pure, fra gli altri, l'ultimo § del capitolo, dedicato a la estensione al caso di pianeti eterogenei, del teorema di Poincaré relativo al limite superiore della velocità di rotazione di un pianeta fluido omogeneo.

Il capitolo secondo tratta delle superficie di equilibrio terrestri. In esso l'A. incomincia col riprodurre una dimostrazione da lui data nel 1901 (in una nota pubblicata nei Rendic. della R. Acc. dei Lincei) della esistenza di superficie di livello chiuse in prossimità della Terra. Giova porre in particolar rilievo in questo capitolo, anche il § II dedicato a la riduzione della latitudine e della longitudine (astronomiche) al livello del mare, mercè formule date da l'A. nel 1894 (Rend. Lincei). L'A. dopo avere ripreso il calcolo, già considerato nel precedente capitolo, del contributo arrecato da i corpi celesti a la gravità terrestre ed aver data un espressione approssimata di tale contributo, chiude

Digitized by Google

il capitolo con un breve cenno su la funzione potenziale della Marea.

Il capitolo terzo incomincia con la dimostrazione del classico teorema di Stokes che pone in luce la dipendenza univoca di grandezza e direzione della gravità in ogni punto di una superficie esteriore chiusa di equilibrio (rispetto ad un pianeta), quando, oltre a la superficie, siano note le grandezze della massa e della velocità angolare del pianeta. Il secondo § del capitolo (15° del libro) contiene un importante complemento del teor. di Stokes, consistente in altra proposizione con la quale è posto in luce come con la massa e una superficie esterna di equilibrio di un pianeta, restino pure determinate la posizione del centro di massa, la direzione degli assi principali d'inerzia e le differenze tra i momenti principali di inerzia.

In particolare l'A. espone la determinazione della funzione potenziale esterna di un pianeta del quale siano note massa e velocità angolare, quando la superficie esteriore di equilibrio nota sia una sfera; egli dà inoltre le formule preliminari per lo studio del caso in cui la assegnata superficie di equilibrio sia un ellissoide. In questo secondo caso la risoluzione del problema (detto da l'A., molto opportunamente, in generale, problema di Stokes) è data con un metodo dovuto a lo stesso Pizzetti (Rend. Lincei 1894), metodo fondato su l'uso di alcune delle *funzioni armoniche ellissoidali* che furono poi studiate in generale dal prof. Morera.

In un § a parte (ultimo del capitolo) è dato un cenno generico del caso in cui l'accennato ellissoide sia di rivoluzione. Con ogni dettaglio tale caso è studiato nel successivo capitolo IV°.

Notevole quivi la deduzione del classico teorema di Clairaut sul *decremento relativo della gravità da l'equatore al polo*, fatto in modo indipendente da qualsiasi ipotesi su la costituzione interna del pianeta. Oltre a questo punto, segnaleremo, nel capitolo in discorso, il confronto fra la espressione relativa alla gravità, qui dedotta, e quella data da Helmert.

Il capitolo V° tratta del problema di Stokes nel caso in cui un ellissoide a tre assi sia la assegnata superficie esteriore di equilibrio del pianeta, mediante le formule preliminari (circa le funzioni armoniche ellissoidali) date nel cap. III°.

Dopo aver dedicato il capitolo sesto a la esposizione di un

Digitized by Google

elegante riassunto della teoria delle funzioni sferiche, l'A. applica le cose qui dette, nel successivo cap. VII°, a la risoluzione del problema di Dirichlet nel caso della sfera ed a lo sviluppo generale della funzione potenziale (esterna) della attrazione di un corpo qualunque. In questo stesso capitolo è pure a segnalarsi (§ 43 del libro) un interessante cenno sui corpi equivalenti rispetto a la attrazione esterna, argomento questo, di cui l'A. si era già occupato in sue speciali ricerche originali.

Nel cap. VIII° è studiato il ben noto problema di Stokes, consistente nella determinazione delle relazioni fra la forma di una superficie esteriore di equilibrio S di un pianeta e i valori della gravità (su S), supposto che la superficie in parola abbia forma così poco diversa da quella sferica da potersi trascurare le quantità piccole di II° ordine rispetto a la differenza relativa fra massimo e minimo raggio vettore di essa e al rapporto tra forza centrifuga e gravità.

L'A. incomincia qui col modificare un poco l'enunciato, e per ciò la trattazione del problema che pone in questa forma: " Siano S, S^1 due superficie entrambe di forma così poco diversa da la forma sferica da rendere lecite le enunciate semplificazioni e siano esse due forme diverse, che, rispettivamente in due diverse ipotesi, può assumere una superficie di equilibrio del pianeta: determinare le relazioni fra gli scostamenti lineari delle due superficie e la differenza delle corrispondenti gravità superficiali. L'A. dopo aver esposta la risoluzione del problema, fondata su l'uso delle funzioni sferiche, quale fu data da Stokes, espone un elegantissimo metodo proprio, col quale è evitato l'uso delle funzioni sferiche. Questo suo metodo originale aveva il Pizzetti già dato in una sua pubblicazione inserita nell'anno 1911 negli Atti della R. Acc. di Torino.

Nel capitolo IX° è studiato il moto rotatorio uniforme di un fluido in generale e sono considerati ivi particolari casi semplici di moto non rigido. Quivi da segnalarsi (§ 55 del libro) il teorema (del quale non mi fu dato trovar traccia altrove), che unico moto rigido possibile per un fluido soggetto a la sola forza di mutua gravitazione e ad una uniforme pressione in superficie è quello di rotazione uniforme.

Il capitolo X°, dedicato a la considerazione dei pianeti fluidi omogenei di forma ellissoidale, tratta in particolare dei classici ellissoidi di Mac Laurin e di Jacobi. Troviamo in questo capi-

Digitized by Google

tolo un § dedicato a lo studio del caso in cui in luogo della velocità angolare è data la quantità di moto areale. Inoltre convenientemente due successivi §§ sono dedicati a lo studio del caso in cui la superficie esterna del pianeta è poco diversa da la sfera, o la velocità angolare è piccola. Molto opportunamente l'A. determina a tale proposito il limite superiore delle grandezze trascurate in questa ricerca. L'A. non omette neppur di dare un cenno delle *funzioni di Lamé*, facendone rilevare la importanza nello studio delle figure di equilibrio relativo di un pianeta fluido omogeneo, poco diverso da quella ellissoidale.

Nel successivo capitolo troviamo una bella trattazione del moto omografico di un pianeta fluido, nella quale sono posti in giusto rilievo gli ellissoidi di Dirichlet e di Riemann.

Uno dei capitoli forse più notevoli per la originalità della trattazione è il XII°, dedicato a lo studio delle configurazioni di equilibrio dei pianeti fluidi eterogenei, ruotanti uniformemente. Come è ben noto, con la locuzione *configurazione di un pianeta*, si intende designare quel complesso di elementi geometrici che servono a caratterizzare le superficie di separazione degli strati di uguale densità. Il lato notevole del capitolo sta, al nostro debole avviso, nel metodo semplicissimo, fondato su sole operazioni di derivazione, qui esposto, per verificare se una *data configurazione* è possibile per un pianeta fluido eterogeneo, Tanto maggiore è, sotto questo rapporto, il merito del prof. Pizzetti, ove si tenga presente che tale procedimento era stato da lui dato nel suo corso di lezioni, pubblicato in litografia nel 1902, corso dedicato a lo stesso argomento che forma oggetto del presente libro. Anzi si può dire essere quello stato la base di questo che ne derivò, mercè qualche sviluppo ulteriore e qualche complemento. Ora relativamente a la questione in discorso, il Poincaré diede bensì una trattazione, non sostanzialmente diversa da quella attuale, nella sua opera: " *Figures d'Equilibre d'un Masse fluide* „ la quale però fu pubblicata nel 1903.

L'A. parte, circa l'argomento in parola, da la considerazione che, detto W il potenziale di attrazione e forza centrifuga, affinchè le superficie di egual densità siano anche superficie di equilibrio, dovrà essere $\frac{1}{2} W$ una funzione della sola W, che egli fa intervenire come variabile da cui dipendono le funzioni che, eguagliate a costanti, forniscono le equazioni delle accennate superficie di eguale densità. Dopo avere stabilita la equazione generale che deve essere soddisfatta a che un pianeta fluido eterogeneo ammetta una

Digitized by Google

data configurazione di equilibrio, applica la detta equazione a dimostrare in modo nuovo che, cosa ben nota, la configurazione ellissoidica non può soddisfare rigorosamente le condizioni di equilibrio relativo, ma può però soddisfarle per approssimazione, secondo cioè un *ordine di approssimazioni*, pure noto, stabilito da Clairaut nelle sue classiche ricerche. Del contenuto di tali ricerche l'A. fa qui una bella esposizione, dando anche la trasformazione di Radau della equazione di Clairaut, trasformazione che permette di ricavare un limite superiore per lo schiacciamento e dell'ellissoide limitante la massa all'esterno, in funzione del rapporto $\frac{Q-P}{P}$, detti P, Q i momenti di inerzia della massa planetaria in relazione rispettivamente a l'asse equatoriale ed a quello polare. L'ultimo § del capitolo riassume brevemente la ricerca di una configurazione generale poco differente da quella a sfere concentriche, dando qui una trattazione esente da quelle obiezioni, a cui è invece esposta la teoria di Laplace. Il successivo capitolo (ultimo del libro), importantissimo per gli studiosi di Geodesia, è dedicato alla applicazione, al caso della terra, del contenuto del capitolo XII°.

L'ottimo libro termina con un'Appendice nella quale sono esposte, dopo le formule di Gauss e di Green, per quanto in forma molto compendiosa, gli elementi della teoria del potenziale, necessari per studiare con profitto l'opera.

Dopo quanto si è detto, può sembrare, oltre che informato ad eccessiva presunzione, quasi superfluo aggiungere un giudizio complessivo sopra la mirabile opera nella quale il Pizzetti ha trasformate le citate lezioni pubblicate in litografia nel 1902. Invero la semplice esposizione sommaria dell'opera stessa costituisce già per sè stessa un elogio. Ci permettiamo soltanto di porre in rilievo un lato particolare del libro, il lato che costituisce, al nostro debole, avviso, uno dei suoi pregi maggiori.

Se cioè il prof. Pizzetti col suo libro, informato a i più sani criteri didattici, ha cercato, in modo speciale, di dare di quelle teorie meccaniche che hanno maggiore attinenza con lo studio della figura dei pianeti e, particolarmente della terra, una esposizione atta a fornire a gli studiosi gli strumenti matematici essenziali per affrontare, con nuove ricerche, i problemi meccanici dell'alta Geodesia, tale scopo fu raggiunto in modo veramente splendido.

ADOLFO VITERBI.

Digitized by Google

Problemi di chiusura.

F. Bützberger, *Ueber bizentrische Polygone, Steinersche Kreis-und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion.* 8°, p. 60, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913 [Prezzo. Mk. 1, 50].

Il triplice scopo propostosi dall' autore del presente opuscolo è indicato dalle tre parti del titolo, il quale compendia i titoli dei tre Capitoli che lo formano.

Nel primo di tali Capitoli il Bützberger riprende l' antica questione di determinare la relazione che deve passare fra i raggi e la distanza dei centri di due circoli coplanari, quando nell'uno si può inscrivere un poligono che sia circoscritto all'altro; egli la risolve mediante considerazioni di geometria elementare e di trigonometria piana pei poligoni di 3, 5, 7, 9, 4, 6, 8, 10 lati confermando o correggendo i risultati dovuti a Eulero, Fuss e Steiner; le considerazioni da lui esposte sono applicabili anche a poligoni di un numero di lati superiore a 10 e confermano la notevole osservazione, fatta nel 1911 da K. Hagge, che, se nella relazione in discorso si suppone = 1 la distanza dei centri dei due cerchi e = 2 il raggio del cerchio circoscritto, si ottiene una equazione, nel raggio del cerchio inscritto, nella quale la somma dei coefficienti vale 1.

Applicando alle figure anzidette un' opportuna inversione si ottengono le notevoli serie di cerchi, costituite ciascuna da cerchi tangenti ciascuno al consecutivo e tutti a due circonferenze fisse, alle quali giunse Steiner, ispirandosi probabilmente ad un passo della *Collezione matematica* di Pappo. Ad esse ed alle analoghe serie di sfere è consacrato il II Capitolo dell'opuscolo in questione.

Il III è di indole esclusivamente storica. L'autore, a cui vennero affidati per lo studio e la pubblicazione i mss. di Steiner, ha col loro mezzo riconosciuto che il sommo geometra svizzero era giunto per proprio conto e prima d'ogni altro alla " trasformazione per raggi vettori reciproci „ (inversione); è una conclusione che non stupirà alcuno di coloro che conoscono le prime di lui pubblicazioni e che non diminuisce in alcun modo i meriti di G. Bellavitis, J. W. Stubbs e W. Thompson (i cui nomi vengono di consueto collegati alla scoperta di quella trasformazione geometrica); ma completa in un punto importante il quadro

Digitized by Google

dell'opera scientifica dell'autore della *Systematische Entwickelung*. Questo primo frutto ottenuto dall'esame dei mss. da lui lasciati, acuisce il desiderio già vivissimo, che con questi venga presto formato un III volume delle sue *Gesammelte Werke*.

G. L.

Notizie.

G. B. Guccia nacque a Palermo il 21 ottobre 1855; suo padre apparteneva al ramo cadetto dei Marchesi di Ganzaria ed a lui, nel 1901, venne riconosciuto il diritto di chiamarsi Nobile dei Marchesi di Ganzaria. Licenziato nel 1873 dall'Istituto tecnico di Palermo, entrò in quell'Università; ma nel 1875 si trasferì a Roma, dopo avere conosciuto il Cremona, che nell'Aprile di quell'anno partecipò al Congresso di scienziati italiani convenuti nella capitale della Sicilia. A Roma fu laureato il 20 Dicembre 1880, dietro presentazione di una dissertazione di geometria, i cui risultati sono stati da lui comunicati al Congresso di Reims dell'*Association française pour l'avancement des Sciences*; è un lavoro di indirizzo prettamente cremoniano al pari di tutti quelli (in numero di 44) pubblicati dal Guccia (1). Professore straordinario di Geometria superiore nell'Università di Palermo, conseguì l'ordinariato nel 1894. Sino dal 1884 concepì e gettò le basi del *Circolo matematico* di Palermo, società internazionale matematica che, grazie alla sua inesauribile generosità ed alle incessanti ed intelligenti sue cure, assurse ad importanza e floridezza insperate. Una malattia ribella ad ogni sorta di cure lo spense nella sua città natale il 29 Ottobre 1914. Ma il sodalizio a cui egli diede vita tramanderà ai posteri più lontani il suo nome, il quale verrà scritto nella storia della scienza, accanto a quello del Lorgna, fra coloro che, non paghi di contribuire direttamente al progresso della scienza, si adoperarono ad accrescerla di efficacissimi organi di pubblicità.

***

Cinquanta anni di storia italiana. È questo il titolo di una poderosa opera in tre vol. in 4.°, fatta sotto gli auspici del Go-

(1) Un elenco completo è annesso alla biografia del Guccia dovuta a M. de Franchis ed inserita nel T. XXXIX (1915) dei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Digitized by Google

verno italiano, per cura della R. Accademia dei Lincei, in occasione del primo cinquantennio di vita del Regno d'Italia. Dall'*Introduzione*, scritta dal presidente Blaserna, risulta che quell'Accademia fu titubante nell'includere nel programma di tale pubblicazione anche le storie delle varie scienze e finì coll'escluderle; non si tratta, quindi, di una pubblicazione che entri nel quadro dei lavori di cui si occupa specialmente questo *Bollettino*. Ma ai nostri lettori va segnalata perchè alcuni articoli (specie per la grande autorità degli autori) li interesseranno come contributi alla conoscenza delle ricerche di certe branche di scienza applicata od alla storia della civiltà in Italia: valgano come esempi quelli sulla triangolazione geodetica (Celoria-Gliamas) e sull'istruzione pubblica e privata (Masi).

***

Quarant'anni di studi galileani (1876-1915). È questo il titolo di una comunicazione fatta da A. Favaro al R. Istituto Veneto nella seduta del 23 Maggio 1915 ed ora pubblicata in opuscolo a parte; ivi l'infaticabile investigatore di Galileo, del suo secolo e della sua scuola presenta un quadro complessivo dei suoi lavori sull'argomento; è un catalogo che comprende 215 numeri, mentre quello pubblicato nel 1896, col titolo *Vent'anni di studi galileani*, ne abbracciava soltanto 100; tale numero fu dunque più che duplicato e va ancora continuamente aumentando.

***

Concorso a premio per le matematiche. La classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna, a richiesta del Cav. Dott. Adolfo Merlani, mette a concorso i seguenti temi:

I " Esporre, col metodo storico-critico, lo sviluppo organico " della teoria delle funzioni ellittiche ed i vari punti di vista " sotto ai quali questa teoria è stata considerata dalla fine del " secolo XVIII fino ai nostri giorni. Indicare l'influenza che " hanno avuto, su altri rami dell'analisi, le vedute presentatesi " successivamente nella nominata teoria „.

II " Dai primi anni del secolo XX si sono proposte, da " varie parti, definizioni della integrazione definita in sostituzione " di quella classica, allo scopo di generalizzare il concetto di " integrale e di applicarlo alle classi di funzioni più estese che " sia possibile.

Digitized by Google

" Il concorrente faccia, di queste definizioni così proposte, " un accurato esame storico e critico; e indichi, fra le definizioni " che riporta, quella che prescieglierebbe, esponendo in modo " esauriente le ragioni della sua preferenza ".

A chi presenterà entro il 31 Dicembre 1916 il miglior lavoro anonimo in Italiano sull'uno o sull'altro dei due temi, il Cav. Dott. ADOLFO MERLANI corrisponderà la somma di L. 500, quale contributo alle spese per il compimento del lavoro stesso.

***

PER LA STORIA DELLE ABERRAZIONI UMANE. Se il problema della quadratura del circolo ha distrutto fra i matematici molte riputazioni che sembravano assicurate, altrettanto fece fra i fisici quello del moto perpetuo; le storie di questi due problemi presentano molteplici e strane analogie riguardo alla psicologia dei personaggi. Ora mentre i tentativi per quadrare il cerchio furono già argomento di molte esposizioni, a quello del moto perpetuo F. Ichak ha consacrato un interessante volumetto della nota collezione teubneriana " Aus Natur und Geisteswelt " appunto intitolato *Das Perpetuum mobile* (Leipzig, 1914), scritto con tanta arte e tanta competenza che non può mancargli il successo che arride a tutte le opere ben pensate ed eseguite con gusto.

***

UN IMPORTANTE CARTEGGIO SCIENTIFICO. Nelle sedute che tenne l'Accademia delle Scienze di Parigi il 26 Luglio ed il 2 Agosto 1915, G. Bigourdan ha dato particolareggiate informazioni intorno alle lettere scambiatesi fra J. M. Delisle e gli astronomi del tempo suo e che si conservano a Parigi; particolarmente notevoli sono quelle di Eulero, che certamente prenderanno posto nella corrispondenza scientifica di questo grande, la quale verrà pubblicata nell'edizione completa delle sue *Opere*.

***

L'INVITO A LESBIA CIDONIA, la più cospicua opera poetica del celebre matematico L. Mascheroni, venne di recente ripublicato da G. Natali (Città di Castello, S. Lapi, 1915) con una dotta Introduzione, che ne determina il posto nella storia letteraria, e con ampi Commenti, che ne chiariscono il senso sotto tutti gli aspetti.

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

Luciano Orlando (1877-1915) (Roberto Marcolongo), pag. 1-10.
Ruggiero Torelli (1884-1915) (Francesco Severi), pag. 11-21.
La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 21-35.
Geometria superiore (G. L.), pag. 36-37.
Teoria degli insiemi (G. Vivanti), pag. 37-39.
Figura dei pianeti (A. Viterbi), pag. 39-44.
Problemi di chiusura (G. L.), 45-46.
Notizie (G. B. Guccia, Cinquanta anni di Storia italiana. Quarant'anni di studi Galileani (1876-1915). Concorso a premio per le matematiche. Per la storia delle aberrazioni umane. Un importante carteggio scientifico. L'Invito a Lesbia Cidonia), pag. 46-48.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques publiées par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrès du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
SALPETER. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

RECENTISSIMA PUBBLICAZIONE

GUIDA ALLO STUDIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

DEL

Professor GINO LORIA

Prezzo del volume elegantemente rilegato L. 3.

MILANO
ULRICO HOEPLI

1916

Digitized by Google

329

H-394

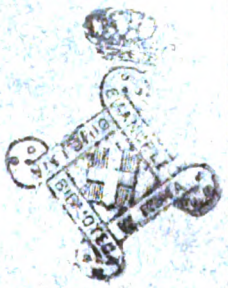
N. 2 PERIODICO TRIMESTRALE 1916

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

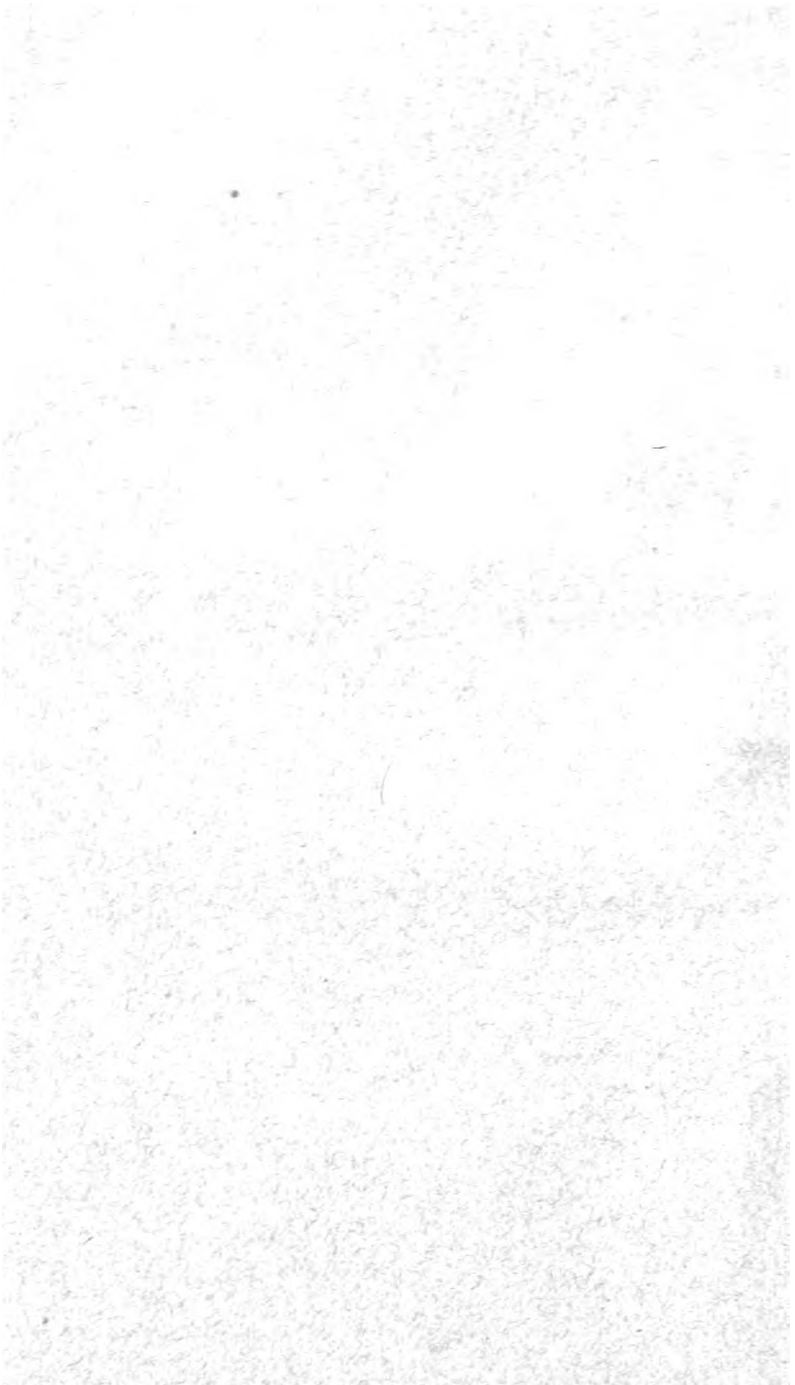


ANNO XVIII
1916

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1916

Pubblicato il 10 Giugno 1916.

Digitized by Google



Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVIII, Fasc. II: **Aprile, Maggio, Giugno** 1916

La correspondance entre Ludwig Schäfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le
Dr. J. H. GRAF, *Professeur à l' Université de Berne*

(Cont. v. pag. 21)

N.° 11.

Rezzonico, 13 agosto 1876.

Carissimo amico

La vostra lettera, che mi giunse or ora, ha messo me e tutta la mia casa in vera desolazione. Il nostro buon Schläfli abbandonarci così inaspettatamente? Ma io non voglio disperare totalmente. Possibile che non possiate venire almeno per un mese? Studiare potete anche in Molvedo, e noi vi procureremo tutti i comodi che vi potranno bisognare. Venite, venite, che il cambiamento gioverà anche alla vostra salute, e troverete nel ritorno più bella la vostra nuova abitazione. Sull'uscio della vostra camera, che adesso è vicina a quella delle ragazze, sta già il cartellino col vostro nome. Non fate torto al povero cartellino. La sig^a. Vistarini non ha ricevuta la lettera.

Vostro aff.mo CASORATI.

N.° 12.

Rezzonico, 16 agosto 1876.

Ottimo Amico

Sono qui già da molto tempo, e non mi pare vero che non deva vederci il mio desideratissimo amico di Berma. Se per buona sorte, qualche cambiamento nelle vostre circostanze vi permet-

Digitized by Google

tesse di abbandonare il fiero proposito di non venire qui, ricordatevi che la vostra cameretta seguita a chiamare il suo Matematico.

Quest'anno non andai in Engadina; invece mandai alla pensione Poult il Cremona, il Beltrami colla moglie, ed altri. Io sono, del resto, pentito di non esserci andato, perchè qui il caldo m' ha dato molto fastidio.

Accogliete i saluti della sig.ª Gigi, dell'Eugenia e della Bianca, che pure vi nominano sempre e vi desiderano assaissimo, ed una cordiale stretta del

vostro F. Casorati.

N.° 13.

Rezzonico, 17 Ottobre 1876.

Carissimo Amico

Mille grazie delle pronte notizie del vostro viaggio, che tutti aspettavamo con impazienza. E grazie ancora per la lettera che mi promettete prima del novembre. Desideriamo che la vostra massaja possa davvero presto ristabilirsi. Qui continua il bel tempo, e noi continuiamo a fare passeggiate, parlando sempre della cara e sempre più desiderata compagnia del nostro Schläfli.

Aggradite i saluti di tutti, ed in particolare quelli del

vostro aff.mo Casorati.

N.° 14.

Rezzonico, 11 novembre 1876.

Mio carissimo amico

Se non mi aveste promesso una vostra lettera prima della venuta di novembre, non oserei stimolarvi, come ora faccio, a darmi vostre notizie e della massaja. Ma, stante la detta promessa, noi siamo veramente impazienti di qualche vostra riga. Siate dunque buono, esaudendo presto il nostro desiderio. Scrivetemi a Pavia; poichè il 15 o 16 andrò colà.

Aggradite i saluti affettuosissimi di tutti ed una stretta di mano del

Vostro devot.mo Casorati.

Digitized by Google

N.° 15.

Rezzonico, 12 Novembre.

Ottimo Amico

Mille grazie delle notizie e dei saluti che ci spediste da Lucerna. Avremmo però maggior motivo di ringraziarvi, se aveste acconsentito di tenerci compagnia sino ad oggi. Speriamo che un'altra volta sarete meno impaziente di ritornare alla vostra Berna.

Prima di abbandonare Rezzonico vogliamo spedirvi cento augurii di prosperità ed una tenerissima stretta di mano con la Sig.ª Gigi, Eugenia e Bianca.

Felice Casorati.

N.° 16.

Pavia, 30 dicembre 1876.

Ottimo Amico

Vogliate aggradire i fervidi augurî per la vostra prosperità che v' invia la intera compagnia autunnale.

Non mi ricordo se vi abbia chiesto la vostra opinione sull' essere più convenevole esercitare l'Eugenia e la Bianca nella buona pronunzia italiana col soggiorno in opportuno luogo di Toscana prima di condurle in Svizzera e Germania pel tedesco, o fare viceversa. Se me la farete conoscere, nella prima occasione che troverete per scrivermi, ve ne sarò grato.

Ma sopratutto desidero di sapere che voi state bene, e che la vostra massaja si è ristabilita perfettamente.

Il vostro affez.mo Casorati

N.° 17.

Pavia, 3 Giugno 1877.

Mio carissimo Amico

Il nostro lungo silenzio a chi permetterebbe di credere che noi ci amiamo cordialmente? Eppure, che voi abbiate per me dell' affetto ne è prova evidente il regalo autunnale della vostra desideratissima compagnia; e che io ne abbia per voi, potrà essere meno evidente, ma non è meno vero. Il vostro carattere innanzi tutto, e poi il vostro sapere non possono non destare

Digitized by Google

affetto e stima altissima in chi vi avvicina. Perdonatemi questo breve sfogo, ed accingetevi a darmi vostre notizie, come io ora passo a darvi le nostre. La salute non venne mai meno a nessuno di noi finora. Io e la sig.ª Gigi abbiamo però avuto parecchi dispiaceri, tra i quali la recente perdita di un egregio amico comune.

Quest' anno dividerò le vacanze in due periodi, in riguardo specialmente delle ragazze, che rimarranno a Milano sino verso la metà dell' agosto. Il primo periodo, cioè una parte del luglio e i primi dieci giorni d' agosto, lo passerò sul lago di Como. Il secondo vorrei passarlo nella Svizzera colle ragazze facendo due cose ad un tempo: cioè respirando buon' aria, e facendo esercizî di lingua tedesca.

In questo secondo periodo la sig.ª Gigi resterà colla sposa di suo figlio. Io verrei con le sole ragazze, senza nè anche una domestica, per mettermi in pensione in qualche albergo o famiglia, in località non molto lontana dall' Italia.

Dove mi consigliereste voi di andare? Dai 10 o 15 di agosto ai 10 o 15 di ottobre. E potrei sperare di vedervi anche quest' anno, ad onta dell'eccezionale maniera con cui intendo passare l' autunno? Dico eccezionale, perchè sono persuaso che, negli anni venturi, troverò in generale più piacevole e comodo ed economico di fare come ho sempre fatto, cioè di prendere casa in qualche bella località dei laghi lombardi.

Aggradite mille cordiali saluti da tutti, e scrivete presto al vostro amantissimo

F. Casorati.

N.° 18.

Milano, 28 giugno 1877.

Ottimo Amico

Mille grazie delle utili notizie, che aveste la bontà di darmi nella lettera del 9 corrente. Alla quale avrei risposto prima d'ora, se non fossi stato per parecchi giorni indisposto a motivo del troppo caldo.

Ero incerto tra due piani: tra quello dell' Engadina, e quello di Interlaken. Ma jeri sera la signorina Brioschi mi ha quasi fatto risolvere per l'Engadina. Essa mi disse che ad Interlaken fa troppo caldo, e che non si possono fare passeggiate di sole

Digitized by Google

tre o quattro ore per i monti (come noi sul lago di Como), ma che bisogna dedicarvi l' intiera giornata, e che inoltre le pensioni vi sono care più che altrove.

La brevità e poca spesa del viaggio, la modicità della pensione, il parlare tedesco degli abitanti, la possibilità di amene e pur non troppo lunghe passeggiate, e la freschezza della temperatura mi fanno parere decisamente convenevole l' Engadina. E sarà molto facile che mi diriga alla Signorina Poult, la cui abitudine di escursioni coi suoi ospiti mi seduce assai. In tal caso vi pregherò di procurarmi qualche lettera di presentazione da parte della cortesissima Signora Koller.

Una sola cosa mi dispiace in questo progetto, ma mi dispiace assai; ed è il timore di non potervi avere con me almeno per qualche settimana. Io sarei perfettamente contento di Sutz, se mi scriveste che troverete modo di passarvi anche voi un po' di tempo.

Da Milano ad Interlaken mi indicaste la via per Flüelen, Lucerna e Berna; ma non si potrebbe, giunti ad Hospenthal, prendere la via della Furca e del Grismel, pervenendo a Brienz per la valle Hasli?

Feci i vostri ringraziamenti al Beltrami, il quale vi saluta cordialmente.

Spero di ricevere ancora presto qualche vostra lettera. La mia andata in Engadina avverrebbe in Agosto. L'anno venturo non vi sarà, spero, cagione di disturbi. Credo che tornerò a fissarmi sul lago di Como, e spero che voi tornerete a confortare me ed i miei colla vostra desideratissima compagnia.

Aggradite i saluti affettuosi di tutti, ed in particolare quelli del

vostro devotissimo F. Casorati.

Scrivetemi sempre a Pavia.

Però a Sutz nel Settembre il freddo darà fastidio?

Se mi poteste indicare l'indirizzo delle Sig.ª Poult, ne avrei piacere; perchè così potrei, occorrendo, rivolgerle alcune domande.

N.° 19.

Zuz, 11 agosto 1877.

Carissimo Amico

Eccomi nella pensione Poult. Mi sembra che mi troverò bene. Però dubito che il freddo mi lasci stare qui al di là del-

Digitized by Google

l' agosto. Sino alla fine d' agosto ad ogni modo mi fermerò quì. Dopo, andrò forse a Churwalden, come voi mi suggeriste, imperocchè sino a Brienz e Thun il viaggio è troppo lungo. La vostra promessa di venirmi a trovare mi ha riempito il cuore di dolcissima gioja. Voi però non dovete scomodarvi troppo per noi. La vostra salute, il vostro tempo sono troppo preziosi, per esservi lecito di non averne somma cura. Vi scriverò poi come effettivamente mi trovi in Zuz.

Aggradite i rispettosi saluti dalle ragazze ed una cordialissima stretta del

vostro dev.mo

F. Casorati.

N.° 20.

Zuz, 27 agosto 1877.

Carissimo Amico

Se avessi ad andare pel 15 o 20 settembre sul lago di Como (a Menaggio), verreste ivi a trovarmi, come negli anni scorsi? Vorrei sperare di sì. Però desidero di saperlo, e quindi vi prego di inviarmi qualche vostra riga più presto che potete. Della pensione Poult sono contentissimo.

Il vostro devotissimo F. Casorati.

N.° 21.

Zuz, 5 settembre 1877.

Ottimo Amico

Partirò da Zuz la mattina del 7. Pel 12 sarò perfettamente installato in *Prada presso Molvedo.* Da Rezzonico si va alla nostra casa dell' anno passato e pochi passi dopo si trova Prada. Vi aspetto con vivissimo desiderio. Venite più presto che potete, pel 12 stesso tanto meglio (1).

Vostro aff. Casorati.

(1) L. Schläfli a été en effet pendant l'automne 1877 a Rezzonico pour visiter F. Casorati.

Digitized by Google

N.° 22.

Rezzonico, 12 nov. 1877.

Ottimo amico

A momenti partiremo da questo simpatico luogo. Tutti sentiamo vivissimo desiderio di inviare affettuosi saluti a Voi che un avverso destino ci ha troppo presto rapito. Vi ringraziamo della cartolina del 4 ottobre, e vi saremo ancora più grati se vorrete darci altre notizie di voi e della vostra Haushälterin, che speriamo ristabilita.

Aggradite in particolare una stretta del

Vostro dev.mo CASORATI.

N.ª 23.

Pavia, 2 maggio 1878.

Mio carissimo amico

Mi pare ormai troppo lungo il tempo in cui manco di vostre notizie. Amo sperare in *Niuna nuova, buona nuova*; però la certezza che voi stiate bene mi sarebbe assai più cara della semplice speranza.

Quest'anno conto di andare a Rezzonico più presto del solito. Posso sperare di avervi ancora mio ospite? E quando vi sarebbe meno incomodo di venire?

Se troverete modo di obbligare la vostra governante a curarsi e nutrirsi convenientemente anche durante la vostra assenza, è da credere che non accadrà più ch'essa si ammali mentre voi venite in Italia. Ed io credo che un viaggio fatto coi debiti riguardi ed un po' di soggiorno sul lago di Como vi devano giovare ancora, come per tanti anni passati.

Regalatemi intanto, appena potrete; vostre righe, accogliete gli affettuosi saluti da tutti noi ed in particolare una cordialissima stretta del

vostro devotissimo

F. CASORATI.

N.° 24.

Rezzonico, 25 luglio 1879.

Ottimo Amico

Domani m'incamminerò con Beltrami ai bagni di S. Bernardino. Nei primi d'agosto vi verrà Cremona. Contiamo di fer-

Digitized by Google

marvici parecchie settimane. Non potreste venire anche voi? Ne saremo lietissimi tutte tre. Ad ogni modo poi vi aspetterò a Rezzonico al principio di Settembre. Mi troverete ancora nella stessa casa del 1877, colla medesima compagnia, la quale pure vi desidera assai. A S. Bernardino arriverò il 29, volendo dapprima vedere il monte Generoso. Alloggerò nell'albergo Brocco.

Il vostro affezionatissimo CASORATI.

N.° 25.

S. Bernardino, 12 agosto 1879.

Ottimo amico

La vostra cartolina mi ha messo di mal umore. Non venire a Rezzonico nè anche quest'anno! I motivi non li conosco ancora, non avendo finora ricevuto da Pavia la vostra lettera.

Domani io e Cremona partiremo da qui e andremo a piedi nella valle Davos, dove verranno a raggiungerci i Beltrami. In qual punto della valle ci fermeremo, nol sappiamo per ora. Ad ogni modo, le lettere a noi vanno dirette a Davos-am-Platz (Poste restante) Se ci troveremo bene, potremo fermarci a Davos anche due settimane. Saremmo tutti assai lieti di vedervi comparire. Ma io vi farei cera soltanto per metà. Ciò nondimeno vi auguro perfetta salute e mi dico con maggior verità di voi

Vostro *fedele* amico F. CASORATI.

N.° 26.

Parpan (Cantone Grigioni)
16 agosto 1879.

Ottimo Amico

Siamo definitivamente stabiliti in Parpan, avendo avuto motivo di rinunciare a Davos. Credo che staremo quì per almeno dieci giorni. L' albergo unico di questo villaggio è buono e non caro. Se verrete, saremo tutti assai contenti.

Il vostro aff.mo CASORATI.

N.° 27.

Rezzonico, 31 ottobre 1879.

Ottimo Amico

Innanzi di lasciare il lago, io e la mia famiglia vogliamo inviare un saluto affettuoso al nostro amatissimo prof. Schläfli.

Digitized by Google

Provai vera gioja in Parpan, rivedendovi più prospero che nel 1877; e questa grata notizia rallegrò al mio ritorno anche tutti i miei.

Ebbi di nuovo vostre notizie a Roma dal Cremona quindici giorni fa, ed a Pavia trovai un regalo preziosissimo, cioè un vostro ritratto, di grandezza metà del naturale, fattomi pervenire dal sig. Gubler da Zurigo.

Abbiate tutta la dovuta cura della preziosa vostra salute, e ricordatevi qualche volta del sempre

vostro devotissimo F. Casorati.

N.° 28.

Madesimo presso Pianazzo
sul monte Spluga.

9 agosto 1880.

Mio amatissimo Collega

Ricevo da Pavia una lettera che mi partecipa il tenore di un telegramma da voi speditomi colà. Come vedete, io non ho colpa della mancata risposta al vostro telegramma. All' amico prof. Schwarz io ho scritto da qui alcuni giorni sono a Zurigo, dicendogli che mi trovo in Madesimo col Beltrami e con altri amici, ma non matematici, e che Brioschi divide il suo tempo fra Roma, Milano e Varese, Cremona fra Roma e i bagni di Lucca, Betti e Dini fra Pisa e i loro villini presso Pisa, Genocchi in Torino.

Gli diceva inoltre che non era in grado di assicurarlo del tempo lungo il quale sarei rimasto in Madesimo, e del dove sarei andato dopo; perocchè la compagnia non aveva voluto prefissare queste cose, prima dell' arrivo di uno dei compagni rimasto a Pavia, cioè del prof. C. Cantoni (filosofo) che arriverà domani. Qui a Madesimo non potremmo eccitare a venire nè Schwarz, nè altri cari amici perchè manca affatto l' alloggio.

Gli diceva altresì che io calcolo di vederlo sul lago di Como, dove andrò certamente al principio di settembre, e di tenermi informato del suo cammino affinchè potessi scrivergli. Siccome quest' anno non era sicuro di potermi fermare sul lago di Como, così non aveva preso un appartamento. Ma adesso ho preso un' appartamentino nell' *Albergo Rezzonico* in Rezzonico, che non ho veduto, ma che spero sia passabilmente buono. E scrissi di

Digitized by Google

destinare una camera pei forestieri, sperando che Schwarz ed altri mi vengano a trovare. E voi non contate di venire quest' anno? Dopo di Schwarz, la camera resterà vuota e chiamerà continuamente il buon amico Schläfli ad occuparla.

Fatemi il piacere di comunicare queste notizie allo Schwarz, dicendogli, che mi scriva a Madesimo, perchè da qui mi manderanno la lettera dove sarò. Però io spero che avrà ricevuto la mia lettera.

Insieme con queste righe vi mando copia di un mio recente lavoro intitolato *Il calcolo delle diff. fin. interpretato* (1) *ecc.* Ve lo raccomando in modo particolare; perocchè credo che le idee in esso esposte sieno di una grande applicabilità, e che i teoremi principalmente quello sul Θ Δ e le applicazioni già contenute in questo primo saggio meritino l'attenzione delle persone competenti. Se troverete il tempo di leggerlo (e la lettura vi sarà facilissima) e se vorrete farmi conoscere un qualche giorno la impressione che vi avrà fatto, ve ne sarò gratissimo.

Ma intanto non tralasciate di scrivermi qualche notizia vostra e di Schwarz, datemi speranza di vedervi sul lago, e vogliatemi sempre bene.

L'aff.mo vostro

F. Casorati.

N.° 29.

Rezzonico, 7 sett. 1880.

Carissimo Amico

Vi aspettiamo, secondo la promessa fatta, in Rezzonico per circa la metà del mese. È qui Schwarz da alcuni giorni; ma non potrà aspettarvi, dovendo partire presto per Padova.

Tutti vi salutano con vivo affetto, ed in particolare il vostro devotissimo

F. Casorati.

N.° 30.

Rezzonico, 11 sett. 1880.

Ottimo Amico

Il 19 o 20 sarò costretto ad abbandonare Rezzonico per forse due settimane. Ciò mi dispiace immensamente. Ma mi di-

(1) Casorati F. *Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi.* Annali di Mat. Tom. X.

Digitized by Google

spiacerebbe ancora di più se dovessero ridursi a pochissimi i giorni della vostra desiderata compagnia. Perciò vi prego caldamente di venire il più presto possibile. E spero che, anche durante la mia assenza, non vi troverete male in Rezzonico; perchè voi portate affetto ed avete confidenza nella mia casa, e tutti in casa vi amano e desiderano sommamente. Schwarz è partito da qui jeri, dirigendosi a Padova e Venezia.

Rallegrate prestissimo di vostra presenza

l' aff.mo vostro F. CASORATI.

N.° 31.

Pavia, 23 Dicembre 1880.

Mio carissimo Amico

Non posso lasciar finire l' anno senza inviarvi il miei augurî per l' anno nuovo.

Sono rimasto assai mortificato quest' autunno di non avervi potuto vedere, e vado cercando conforto nel pensiero che vi vedrò nell' estate venturo.

L' Eugenia unisce i suoi ai miei voti per la vostra prosperità. Se potrete, mi farete un vero regalo dandomi presto qualche vostra notizia.

In tale occasione vi pregherei di dirmi tutto quello che sapete intorno al sig. dott. L. Stickelberger (1), ora prof. a Freiburg, e prima, credo, a Zurigo. Dove ha fatto gli studî? Era forse assistente di Frobenius? Si aspetta molto da lui? Questa curiosità mi è venuta in seguito ad una *Akademische Antrittsschrift* (2), sulle equazioni differenziali lineari, intorno alla quale mi prenderò la libertà di scrivervi in altra occassione parecchie osservazioni se mi direte di averla veduta. Ma se potete darmi queste notizie senza molto disturbo, bene; altrimenti, tralasciate. E ad ogni modo vi prego di non far sapere che io ve le ho chieste.

Ho parlato della sola Eugenia, parchè la Bianca è a Roma presso mio fratello. Tutte due quest' autunno si facevano una

(1) Stickelberger Ludwig, né à Buch (Canton de Schaffhausen) 18, V, 1850, depuis 1879 prof. de mathém. à Fribourg (Brisgau).

(2) *Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Leipzig, 1881); cfr. CASORATI, *Sopra un recentissimo scritto del sig. Stickelberger* (Ann. di Matem., 2 Ser., T. X).

Digitized by Google

festa di vedervi arrivare; epperò sono rimaste anch' esse assai malcontente.

Conservate sempre la vostra preziosa e desideratissima amicizia

al devotissimo vostro

F. Casorati.

N.° 32.

Pavia, 30 dicembre 1880.

Mio amico carissimo

Le prime pagine dell' Antrittsschrift del sig. Stickelberger m' hanno cagionato gravissimo dispiacere. Non solo egli adopera le idee da me esposte nella Memoria *Il calcolo delle differenze finite ecc.* senza attribuirne la paternità a me; ma, la prima volta poi che mi cita, lo fa in modo scortese e con una critica insensata, come vedrete.

Da un collega di studî doveva aspettarmi un poco più di cortesia e di sincerità, se non di benevolenza. Ma ho subito scritto una lettera al prof. Brioschi, pregandolo di farla inserire nel fascicolo degli Annali, che egli dicevami dover uscire alla fine del mese.

Vi ringrazio assai della cordiale memoria che serbate anche di tutti i miei parenti veduti sul lago, ai quali non mancherò di comunicare i vostri preziosi augurî.

Vi ringrazio altresì moltissimo della dolce speranza che mi date per l'estate venturo.

Delle *bozze* pel volume Chelini non vi so dire niente in questo momento. Ma sino alla fine di febbraio il volume non sarà compiuto.

Avete fatto bene a non scrivere per me al Frobenius, se non eravate già in corrispondenza.

Amate sempre

il vostro aff.mo

F. Casorati.

N.° 33.

Madesimo sul monte Spluga.

30 luglio 1881.

Amico Carissimo

Quanto tempo senza vostre notizie! E ir queste vacanze riusciremo ad incontrarci? I miei parenti hanno voluto che la-

Digitized by Google

sciassi a loro per questi mesi Eugenia e Bianca. Perciò sono rimasto solo e devo pellegrinare di albergo in albergo. Qui resterò fino verso la metà d'agosto, poi andrò a vedere Eugenia e Bianca in Val di Scalve, Provincia di Bergamo, quindi a Campiglio, Provincia di Trento, dove troverò Beltrami, Bertini e Cremona. Beltrami mi scrive che ivi si sta bene e a buon mercato.

Non so che cosa farò più tardi. Vi sarei molto obbligato se mi scriveste qualche riga sulla vostra salute, che spero buona, e sulle vostre intenzioni per queste vacanze.

Il vostro devotissimo

F. Casorati.

N.° 34.

Pavia, 16 agosto 1881.

Ottimo amico

Sono trattenuto in Pavia da una malattia del padre del mio ottimo amico, ingegnere Capsoni; malattia che minaccia di togliergli la vita da un giorno all' altro.

Appena potrò, andrò a Vilminore in valle di Scalve (Provincia di Bergamo, Mandamento di Clusone, alto 1100 metri), dove sono Eugenia e Bianca. Di là vorrei passare a Campiglio nel Trentino, dove sono Beltrami, Bertini e Cremona. Ma la suddetta malattia e l'ignorare per quanto tempo rimarranno i matematici allo stabilimento di Campiglio, ed Eugenia e Bianca, coi miei parenti a Vilminore, mi rende impossibile di sapere, per ora, dove passerò il settembre. Questa incertezza è la causa principale del mio ritardo nel rispondere alla vostra cara lettera del 2 agosto. Io avrei voluto dirvi qualche cosa di certo per il settembre.

Però vi scriverò subito ancora, quando saprò che cosa posso fare. Ben volentieri verrei a Berna, se potessi! Chi sa che non possa l' anno venturo? Per quest' anno aspetterò io voi, quando mi sarò fissato in qualche nido.

Intanto accogliete mille ringraziamenti per le benevoli parole sul mio dispiacere col sig. Stickelberger, ed altri mille per la disposizione che mostrate a venirmi a trovare, la quale mi conforta assai, assai.

Le carte con i nomi della sig.ª Vistarini e di Eugenia e Bianca, vi saranno state spedite come un ricordo dell' alta stima e dell' affezione che tutte serbano per voi. Non posso dirvi di più,

Digitized by Google

perchè è più di un mese che non vedo nè la sig.ª Vistarini nè Eugenia, nè Bianca. Non occorre che voi rispondiate.

Aggradite infine anche una tenerissima stretta di mano del vostro devotissimo F. Casorati.

Volendomi scrivere, dirigete a Pavia, da dove mi manderanno le lettere dovunque andrò.

N.° 35.

Vilminore (in valle di Scalve)
Provincia di Bergamo - Mandamento di Vilminore
28 agosto 1881.

Ottimo amico

Ho dovuto smettere il pensiero di raggiungere a Campiglio i colleghi matematici, perchè m' è stato forza di rimanere a Pavia troppo lungamente. Beltrami m' ha scritto che sarebbero rimasti a Campiglio sino alla fine d'agosto; ma che non avevano per anco risoluto dove andare dopo, o se restare quivi.

Se le vostre circostanze vi permettessero di venire a Vilminore, io ne sarei lietissimo; perocchè mi fermerò qui con Eugenia e Bianca sino ai 10 o 15 di settembre, e poi ritornerò a Pavia, per rimanervi.

Qui abbiamo un'abitazione appena mediocre; però la vostra cameretta non vi dispiacerebbe, io credo; e godreste molto la bellezza di questa valle, che è veramente tra le più belle che si possano vedere. Vilminore è a poco più di 1000 metri d'altitudine.

Partendo da Bergamo, la via più comoda è di andare verso Brescia sino a Palazzolo, poi ancora in ferrovia a Paratico-Sarnico in riva al lago d' Iseo, poi col piroscafo a Lovere. Da Lovere parte ogni mezzodì una piccola carrozza per Dezzo, villaggio distante cinque chilometri da Vilminore. Se mi avvertite della vostra venuta, io vi verrò incontro con Eugenia e Bianca, e sarà per tutti tre una gran gioja di rivedere il nostro amatissimo, fedele amico.

Aggradite intanto una cordiale stretta di mano.

Vostro

F. Casorati.

Digitized by Google

N.° 36.

Vilminore, 12 settembre 1881.

Ottimo amico

Giovedì partirò da Vilminore e per il 17 sarò a Pavia, dove mi fermerò. Oramai anche a Pavia il clima è sano e gradevole. Ivi abbiamo una casa abbastanza comoda, dove il nostro Schläfli troverebbe una cameretta, la quale, se potesse parlare, direbbe di essere più che desiderosa, smaniosa di alloggiarlo. E perchè non verreste a Pavia? Siete pure stato in parecchie altre città universitarie d'Italia, mentre in Pavia giammai! E l'Esposizione di Milano non vi tenta? Quanto gioirei se vi tentasse! Da Pavia si farebbero comode gite all'Esposizione.

Intanto aggradite i rispettosi saluti di Eugenia e Bianca ed una cordialissima stretta di mano del vostro devotissimo

F. Casorati.

N.° 37.

Pavia, 27 settembre 1881.

Ottimo Amico

Assai più volentieri della lettera avrei visto arrivare la vostra persona. Ma, poichè veramente non potete, mi è forza contentarmi della lettera, e di questa dunque vi ringrazio.

Mi ricordo benissimo dei dubbî che avete manifestato sulla dimostrazione di Dirichlet, e, quando comparirà il vostro nuovo lavoro, lo studierò col massimo interessamento.

La valle di Scalve confina all'ovest colla valle del Serio, al nord colla Valtellina ed all'est colla Camonica. Il suo fiume o torrente principale si versa nel fiume della Camonica, cioè nell'Oglio. Quel fiume si chiama Dezzo, ed una volta Decio.

E la valle una volta si diceva Decia. Il capoluogo della valle è Vilminore. Però Schilpario è villaggio più popoloso di Vilminore. Dalla Camonica si entra in val di Scalve per parecchi passi o gioghi; ma la via carrozzabile è quella che corre lungo il Dezzo, stata fatta da pochi anni.

Per andare da Milano a Vilminore secondo la via più comoda, si va a Sarnico sul lago d'Iseo in ferrovia, poscia su piroscafo a Lovere, poi si entra in val Camonica, seguendo l'Oglio fino allo sbocco del Dezzo, e finalmente si rimonta lungo il Dezzo.

È la valle più bella che finora io abbia veduto.

Digitized by Google

Godo di sapervi in buona salute; ma vi raccomando di non dimenticare che per conservarla meglio conviene muoversi e distrarsi un poco durante le vacanze.

Eugenia e Bianca si uniscono a me nell'augurarvi con tutto il cuore la ben meritata prosperità. I Beltrami sono a Venezia.

Con una cordialissima stretta di mano mi dico

il vostro devotissimo

F. CASORATI

N.° 38.

Zuz, Engadina 6 agosto 1882.

Ottimo Amico

Sono nella pensione Poult con Beltrami a tener compagnia al Cremona, qui venuto coi figli, dopo la disgrazia della perdita della moglie. Quanto piacerebbe a me ed a tutti di veder comparire il nostro caro Schläfli! Ma la distanza è troppo grande per averne speranza. Se passeremo da Zuz a luoghi più vicini a Berna, ve ne informerò. Intanto ci fareste già un bel regalo dandoci notizie della vostra persona.

Aggradite i saluti affettuosi di tutti, ed in particolare una cordialissima stretta di mano del vostro

(*Continua*) F. CASORATI.

Calcolo infinitesimale.

J. A. SERRET, *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung. Nach* AXEL HARNACKS *Uebersetzung.* IV *und* V *Auflage bearbeitet von* GEORG SCHEFFERS. III Band: *Differentialgleichungen und Variationsrechnung.* Mit 64 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1914, 8°, p. XIV-736.

Non ripeteremo a proposito del presente volume quanto già dicemmo in altre occasioni relativamente a quest'opera (v. *Bollettino*, T. XI, 1908-09, p. 56 e XIII, 1911, p. 70), nè segnaleremo le migliorie subite dall'ultima parte del celebre trattato in quistione prima di essere nuovamente presentato al pubblico. Solo notiamo che esso si chiude con ampie notizie storiche relative alla teoria delle equazioni differenziali ed al calcolo delle variazioni, le quali, da un lato completeranno utilmente la cultura dei giovani lettori, e dall'altro ajuteranno coloro che intendono proseguire nelle ricerche relative ad argomenti importanti e che non è esagerazione dire inesauribili. G. L.

Digitized by Google

Opere complete ed Enciclopedie.

Oeuvres complètes de THOMAS JAN STIELTJES *publiées par les soins de la Société mathématique d' Amsterdam.* Tomo I (Groningen, 1914) 4°. p. VII + 471.

La pubblicazione della Corrispondenza fra Stieltjes e Hermite ci diede occasione (*Bollettino*, VIII, 1905, 38-39; ofr. anche IX, 1906, 39-40) di narrare brevemente la vita del primo, distintissimo matematico olandese che fece della Francia la propria patria di adozione. Ma la sua terra natale non dimenticò l'illustre suo figlio lontano e, pochi anni dopo che una morte immatura ne interruppe il glorioso cammino ascendente, deliberò di elevare a lui il più significante dei monumenti a cui possa aspirare un pensatore, col fare una pubblicazione integrale dei suoi scritti. L'iniziativa, la direzione e l'esecuzione della nobile impresa costituiscono altrettanto nuove benemerenze della Società matematica di Amsterdam, sempre in prima linea fra i sodalizi che promuovono il progresso delle scienze esatte; il volume che oggi annunziamo sta a provare lo zelo ed il senno spiegati dai tre matematici (W. Kapteyn, J. C. Kluyver e E. F. van den Sande Bakhuyzen) a cui fu affidata la direzione della progettata edizione. In esso si trovano riprodotti 47 lavori pubblicati dallo Stieltjes nel decennio 1876-86; parecchi sono noti a coloro che seguirono le pubblicazioni matematiche francesi, ma quelli di più antica data, essendo stati scritti in Olandese ed inseriti in periodici non molto diffusi, riusciranno per molti cosa del tutto nuova: con grande senso di opportunità gli editori li accompagnarono da una traduzione in francese. Uno poi è in tedesco e venne per la prima volta reso di pubblica ragione senza nome d'autore; gli editori ne stabilirono la provenienza mediante una lettera che verrà pubblicata nel II vol. della presente edizione.

I temi trattati appartengono per la miglior parte all'aritmetica superiore, all'algebra ed all'alta analisi; altri pochi, riferendosi alla geodesia e discipline limitrofe, si debbono riguardare come il riflesso delle occupazioni imposte allo Stieltjes quand'era impiegato all'Osservatorio astronomico di Leida. In tutti questi lavori si trova qualche nuovo risultato o qualche nuovo punto di vista, onde, col porli alla portata di tutti, la

Digitized by Google

Società matematica di Amsterdam ha, non soltanto contribuito ad accrescere il numero degli ammiratori di quell'eminente scienziato, ma, presumibilmente, ha assicurato a lui nuovi continuatori: ad essa dunque il plauso e la gratitudine di tutti matematici!

G. L.

Storia.

G. MILHAUD, *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*. Paris, Alcan, 1911. 8°. p. 235.

Questo volume è costituito dalla riproduzione di parecchi articoli pubblicati fra il 1906 ed il 1911 in riviste francesi; esso ha le qualità ed i difetti di tutte le opere congeneri: mentre manca della dote di vera organicità che hanno di regola i libri aventi un soggetto ed uno scopo unici, ha le qualità di varietà e scorrevolezza che seducono tanti lettori.

Esso comincia con un discorso commemorativo di P. Tannery, scritto con l'affetto e la competenza d'un discepolo dotto ed entusiasta. Seguono poi tre articoli che lumeggiano da vari punti di vista le relazioni fra la scienza greca e la scienza orientale ed uno suggerito dal frammento archimedeo di recente scoperto dall'Heiberg. Gli altri appartengono alla scienza moderna: uno studia le leggi del moto dal punto di vista della filosofia di Leibniz, mentre gli altri tre concernono Descartes: Descartes e la geometria analitica, Descartes e la legge dei seni sulla rifrazione della luce, Descartes e Newton. Ciascuno di questi scritti ha per punto di partenza qualche recente pubblicazione, ma non si può dire una vera recensione, contenendo sempre qualche commento od osservazione originale; tutti si leggono con piacere e lasciano nel lettore direi quasi il deposito di qualche nuova cognizione o di qualche nuovo ravvicinamento.

G. L.

ARCHIMEDES WERKE. *Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von* SIR THOMAS L. HEATH. *Deutsch von* Fritz KLIEM, Berlin, O. Häring, 1914. 8°. p. XII-477.

Questo volume contiene la versione tedesca di due pubblicazioni note ai nostri lettori (*Bollettino* T. II. 1899, p. 13-14; e T. XVI. 1914, p. 22); prima di venire tradotte esse vennero

Digitized by Google

fuse in un tutto organico, inoltre sottoposte ad una completa revisione, consigliata (o per meglio dire, imposta) dalla ristampa recente delle Opere di Archimede secondo la celebre edizione dell' Heiberg.

Questa pubblicazione, mentre conferma il giudizio da tempo pronuciato sopra la meritoria fatica di Sir Heath, assicura ad essa una sfera d'influenza di gran lunga superiore a quella di cui godeva sinora; cosa di cui non possono che rallegrarsi tutti coloro a cui sta a cuore che i capolavori della matematica greca acquistino un numero di estimatori sempre più grande.

G. L.

R. Guimaraes, *Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nunes.* Coimbra 1915. 8°. p. 86.

Il celebre scienziato a cui è consacrata questa pubblicazione nacque da famiglia israelita nel 1502 ad Alcacer da Sol. Studiò all' Università di Lisbona e vi si laureò nel 1529: subito vi ottenne una cattedra, ad essa appartenne per molto tempo e, quando fu trasportata a Coimbra, vi occupò (1544-62) una cattedra di matematica. Ebbe numerosi e valenti discepoli, che lo fanno considerare come il vero restauratore delle scienze esatte in Portogallo. La protezione della corte lo salvò dalle persecuzioni dell'Inquisizione; morì l'11 agosto 1578.

Delle sue opere l'A. fa una minuta analisi e conferma il voto, già da lui ripetutamente fatto, che di esse il Governo portoghese deliberi una completa edizione nazionale.

G. L.

J. Rey Pastor. *Los matematicos espanoles del Siglo XVI.* Discurso leido en la solenne apertura del Curso académico de 1913 a 1914. Oviedo, 1913.

Quantunque un discorso non consenta minuti particolari, pure in questo lavoro si trovano molte notizie sconosciute ed importanti; il suo valore è aumentato dalla " Bibliografia matematica spagnuola del Secolo XVI „ postavi come chiusa.

G. L.

A. Mitzscherling, *Das Problem der Kreistheilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Mit einem Vorwort von* H. Liebmann. Mit 210 Figuren in Text. 8°. gr. p. VI-214 Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1913.

Digitized by Google

Chi segue l'evoluzione storica delle scienze, anche più astratte, non può non essere impressionato dall'osservazione che il più potente stimolo, il più efficace fermento, per la ricerca di nuovi veri fu offerto dai problemi, sia che questi fossero suggeriti dalle esigenze della vita civile, sia che a formularli siasi stati condotti dall'insaziabile brama di sapere o dall'orgoglio di superare nuove difficoltà. Tale fatto è maggiormente evidente nei primi stadi di sviluppo della scienza: colpisce, infatti, chi esamina i primordi del calcolo infinitesimale, come chi, invece, investiga le origini della ricerca geometrica. Ed invero è innegabile che allo scoprire nuovi teoremi, a congegnare nuovi artifici dialettici, ad immaginare nuovi enti geometrici servirono potentissimamente i problemi di misurare un cerchio, di dividere un angolo in tre parti eguali e di costruire un cubo doppio di un altro. Non meno feconda di nuove verità geometriche fu l'antica questione relativa alla costruzione di poligoni regolari; onde, come da tempo si giudicò opportuno narrare la storia di quei tre celebri problemi (1), è ben naturale che siasi pensato di fare altrettanto riguardo all'ultimo, oggi che esso può ritenersi in sostanza esaurito, dal momento che si conosce l'impossibilità di risolverlo in generale con la riga ed il compasso e si conoscono i casi in cui ciò è possibile, oggi che le curve ausiliari sino ad ora invocate per scioglierlo si trovano elencate, classificate, discusse in opere speciali. Per ciò era facile predire la non lontana apparizione di una storia del problema in questione: a scriverla si è accinto l'autore del presente scritto ed ha assolto tanto lodevolmente il compito assunto che è da rimpiangere si debba rendere conto di un'opera che è la prima e sarà l'ultima recante il nome dell'autore, al quale un avverso destino vieta di ascoltare le lodi che, al pari di noi, gli tributeranno tutti coloro che s'interessano al diffondersi di notizie esatte e complete sopra tutte le varie branche della matematica.

Per porgere ai nostri lettori un'idea del piano dell'opera in esame osserveremo che, per costruire un n-gono regolare di

(1) Vedi: Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, avec une Addition concernant les problemes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle*, Nouvelle édition revue et corrigée (Paris, 1831); Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione, sive inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas* (Gottingae 1798).

Digitized by Google

dato lato, basta saperne inscrivere uno in un dato cerchio e poi applicare un' opportuna similitudine; d'altronde l'inscrizione in un cerchio di un n-gono regolare rientra nella divisione in n parti eguali dell' intero giro, onde si riduce ad un caso particolare della divisione d'un angolo in n parti eguali. Emerge da ciò che le ricerche aventi per fine la costruzione dei poligoni regolari si ripartiscono naturalmente in due categorie, comprendenti l'una le costruzioni dirette di tali poligoni, l'altra la divisione in parti eguali di un angolo qualunque. Donde la ragione delle due parti distinte di cui consta l'opera di cui ci stiamo occupando.

L'autore comincia la I^a parte raccogliendo da antichi monumenti le testimonianze relative alla conoscenza di speciali poligoni regolari possedute fin dai primordi della civiltà, per dare subito notizie tanto delle costruzioni con rette e circoli di speciali poligoni regolari che trovansi negli scritti tramandatici dalla antica Grecia, quanto della clamorosa scoperta fatta da Gauss e che costituisce la più importante aggiunta fatta dai moderni alla geometria elementare. Scendendo poi a più minuti particolari egli insegna le costruzioni che vennero suggerite per speciali poligoni regolari, sia che richiedano l'impiego simultaneo della riga e del compasso, sia che basti la sola riga dopo avere tracciato un cerchio fisso (Steiner), sia finalmente che richieggano l'intervento del solo compasso (Mascheroni), e finisce coll'informare i suoi lettori dei perfezionamenti ottenuti quando al problema che ci occupa vennero applicati i concetti ed i metodi della geometrografia di E. Lemoine.

In seguito s'incontrano le costruzioni approssimate sinora suggerite di speciali poligoni regolari che richiedono o soltanto la retta ed il cerchio oppure certe curve speciali: riguardo a quelle della prima specie ci sia lecito osservare che qualche perfezionamento si può arrecare a quanto espone l'A. ricorrendo ai *Metrica* di Erone Alessandrino, opera importantissima di recente ritrovata che sembra essergli sfuggita completamente. Egli chiude la I^a parte del suo lavoro dando notizia dei procedimenti che furono suggeriti dai teorici per costruire certi poligoni regolari col mezzo di un sistema di squadre, e dai pratici per " graduare „ un qualunque cerchio materiale.

Volgendosi alla questione di dividere un angolo in parti eguali l'A. si occupa anzitutto della trisezione, sulla quale si

Digitized by Google

arresta a lungo e così ci offre la più completa monografia a noi nota sopra questo celebre problema. E per convincere i nostri lettori che in tale nostro giudizio non vi è alcuna esagerazione noteremo che egli, dopo avere stabilita l'impossibilità della trisezione in generale e segnalati alcuni angoli speciali pei quali essa è possibile, fa conoscere successivamente i metodi elementari (per tentativi) di trisezione immaginati nell'Antichità e nel Medio Evo, dai Greci e dagli Arabi, le molteplici costruzioni teoricamente esatte in cui intervengono le sezioni coniche, e finalmente quelle basate sull'impiego di curve algebriche di terzo o di quarto ordine (1). In seguito si apprendono i procedimenti approssimati per eseguire la trisezione di un angolo qualunque e finalmente la natura ed il funzionamento di certi meccanismi all'uopo immaginati.

Una via parallela a quella testè delineata viene battuta dall'A. nell'esporre quanto si conosce intorno alla divisione d'un angolo qualunque in un numero arbitrario di parti > 3; ed invero, dopo alcune considerazioni generali intorno alla possibilità della polisezione, l'A. enumera e studia le curve settrici che furono sino ad oggi considerate, distinguendo le algebriche dalle trascendenti (ove non si fosse limitato al piano avrebbe potuto aggiungere l'ordinaria elica cilindrica); esamina poi le polisezioni approssimate, valutando in ogni caso (come già fece nelle precedenti circostanze analoghe) l'errore commesso, e finisce facendo conoscere gli strumenti polisettori sino ad ora immaginati.

In ogni occasione l'A. non si limita a cenni superficiali, ma dà complete notizie sopra i procedimenti usati e sopra le figure geometriche in cui s'imbatte, senza risparmio di formole, di calcoli, di belle figure. Così la sua opera risulta più o meglio di una semplice opera storica; è un prezioso complemento agli ordinari trattati di geometria generale. Essa, nelle mani di un maestro giudizioso, potrà servire a rendere meno arida l'esposizione puramente dottrinale di parecchie teorie; onde costituisce un eccellente argomento di fatto a favore dell'introduzione dell'elemento storico nell'insegnamento della matematica.

G. L.

(1) Questa sezione dell'opera in esame costituisce un'ottima monografia intorno le curve trisettrici, riguardo alla quale ci sia permesso un semplice appunto: come mai l'A. trasforma (p. 117) il noto matematico Gaston Albert Gohierre de Longchamps in Guido de Longschamps?

Digitized by Google

Esercizi.

M. CHINI, *Esercizi di Calcolo infinitesimale.* Seconda edizione con aggiunte. Livorno, Giusti, 1914: 8° p. X + 300 (L. 4. 50).

L'opera del prof. Chini, venuta in luce nel 1893, ha trovato meritata fortuna nelle nostre Università

Essa presenta, in piccola mole, una ricca e svariata raccolta di esercizi quasi 300) attinenti a tutte le parti dell'Analisi infinitesimale, ed accompagnati dallo svolgimento completo. Il volume si divide in tre sezioni: Calcolo differenziale, Calcolo integrale, Equazioni differenziali; e gli argomenti considerati sono quelli che costituiscono l'ordinario programma dei corsi universitari. Eccone un breve riassunto.

Calcolo differenziale: Ordini d'infinitesimo, derivazione, massimi e minimi, espressioni indeterminate, sviluppi in serie, cambiamento delle variabili indipendenti, funzioni implicite, applicazioni alle curve piane e sghembe ed alle superficie.

Calcolo integrale: Integrazione per parti, integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti, differenziali totali, integrali definiti semplici e doppi, integrazione per serie, archi, aree e volumi.

Equazioni differenziali: equazioni ordinarie del primo e del secondo ordine, equazioni lineari d'ordine qualunque, sistemi d'equazioni del primo ordine, equazioni a derivate parziali del primo ordine, applicazioni geometriche.

Gli esercizi sui sistemi d'equazioni e sulle equazioni a derivate parziali compaiono per la prima volta in questa nuova edizione, che tipograficamente è assai superiore alla precedente. Del resto le differenze sono poche; e parecchi errori di stampa e di calcolo sono passati inalterati nella nuova edizione. Ecco le osservazioni che ci si sono presentate in una rapida lettura.

Anzitutto alcuni errori di stampa. A p. 16 l. penultima e a p. 258 l. ultima c'è un errore di segno; a p. 25 l. ultima manca il fattore 4; nella prima formola a p. 94 deve leggersi ϱ'^2 anzichè ϱ^2; a p. 96 si deve correggere $\frac{a}{4}$ in $\frac{a}{2}$; a p. 115 l. 5 dal basso deve porsi 7 in luogo di z; nella prima formola a p. 194 si trova φ invece di q^2; l'ultima espressione di S a p. 200 contiene un errore, e così la penultima formola a p. 233.

Digitized by Google

Errori di calcolo si trovano invece nella seconda formola a p. 69, nella terza a p. 108, e negli esercizi 136, 140, 143, 145, 156.

Abbiamo notato anche qualche inesattezza d'altra natura. Così a p. 19 l'espressione data per $f'(x)$ non è la derivata ma la semiderivata di $f(x)$. Pure a p. 19 non è esatto dire che il radicando non si annulla mai; infatti poco più innanzi si considera appunto il caso in cui esso prende il valore zero.

A p. 75 si legge che l'equazione:

$$\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\varphi = \cos \varphi \cos 2\varphi$$

equivale all'altra:

$$\cos^2 \varphi = \frac{3}{4};$$

invece essa equivale a:

$$\cos 3\varphi = 0,$$

che si scinde nelle due:

$$\cos^2 \varphi = \frac{3}{4}, \quad \cos \varphi = 0.$$

Nell'esercizio 92 a p. 89 l'asintoto non passa per il polo, ma dista da esso di 1.

A p. 171 sarebbe stato opportuno osservare che il massimo esiste perchè si tratta di una funzione continua.

A p. 173-174 si scompongono in parti i termini di una serie convergente, ciò che non è sempre lecito; ed avviene infatti che le serie risultanti sono semiconvergenti.

A p. 175 l'ultima frase " altrimenti è divergente „ non è esatta, giacchè la condizione di convergenza ivi applicata è sufficiente ma non necessaria.

Le considerazioni riguardo agl'infinitesimi fatte a p. 200 e a p. 218 non sono rigorose.

Una svista che si ripete più volte (vedi p. 76, 78, 82) è quella di considerare il raggio vettore ϱ in un sistema di coordinate polari come suscettibile di prendere anche valori negativi, ciò che non è nell'uso comune, e che, in ogni modo, esigerebbe convenzioni diverse dalle ordinarie riguardo all'angolo φ (v.: G. Loria, *Osservazioni sopra le coordinate polari*, Period. di mat., T. 15, 1899, p. 7-11).

Nell'esercizio 8 a p. 4 sarebbe stato bene avvertire che il radicale si intende preso positivamente.

Digitized by Google

In fine dell'esercizio 21 (p. 14) poteva aggiungersi che il risultato ottenuto è evidente geometricamente.

L'esercizio 84 (p. 81) si tratterebbe più semplicemente risolvendo l'equazione della curva rispetto ad x.

Nell'esercizio 87 (p. 84-85), dopo aver trovati 3 asintoti, è inutile cercarne altri, essendo la curva considerata del 3° ordine.

Sono queste, in gran parte, mende che un esperto lettore avverte e corregge da sè; ma non dobbiamo dimenticare che si tratta di un libro destinato sopra tutto agli studenti, per i quali, nuovi ancora ad una non facile disciplina, anche un volgarissimo errore di stampa può costituire un grave scoglio.

E noi speriamo che l'egregio Autore, in una terza edizione, che gli auguriamo prossima, vorrà sottoporre la sua opera ad una accurata revisione, in modo da renderla altrettanto perfetta nella forma quanto è intrinsecamente pregevole e buona.

G. Vivanti.

Algebra elementare.

G. St. L. Carson and D. E. Smith. *Elements of Algebra.* Part I. Ginn & Co. (senza data; giunta al *Bollettino* in Giugno 1914) 8°. p. V + 1-336. Parte II (giunta in Luglio 1915). p. 327-528.

Quali furono i moventi alla presente pubblicazione risulta dalle seguenti dichiarazioni che si leggono nella prefazione:

« A chiunque consideri lo stato attuale dell'insegnamento appare evidente che vi è ragione per un'effettiva ansietà, non soltanto riguardo al lavoro odierno, ma ancora riguardo a tutto il futuro ordinamento delle nostre scuole. Fra gli ultra-conservatori, che stanno per il completo mantenimento delle antiche tradizioni, e gli estremi iconoclasti, che non comprendono il significato dell'eredità, ai genitori spetta il còmpito tutt'altro che facile di decidere quale sia il sistema di educazione migliore e più utile per i loro figliuoli. Non meno difficile è il còmpito dell'insegnante, ed il problema in cui ci s'imbatte rispetto alla matematica è altrettanto serio di quelli che s'incontrano negli altri rami d'insegnamento.

« Nella ricerca di un giusto mezzo fra questi due estremi, gli insegnanti d'algebra non ebbero la fortuna che potevasi ragionevolmente attendere. Tentativi lodevoli per rendere la trat-

Digitized by Google

tazione più prossima alla realtà ed interessante e per restringere entro ragionevoli confini le parti più formali ebbero troppo spesso come risultati un sensibile abbassamento nel livello della scolaresca ed un'infelice mancanza di sistema. Entrambi questi risultati sono ben noti a tutti coloro che conoscono i frutti dati dalle nostre scuole e sono entrambi gravissimi.

« Il presente libro è scritto col desiderio di conservare i lineamenti che assicurarono il successo ai libri di testo in uso e di incorporare, nello stesso tempo, quei metodi moderni che sembrano in grado di subire la prova dell'esperienza; essa fu scritto più per soddisfare gli effettivi bisogni dei professori odierni che per accostarsi ad una futura Utopia. L'algebra è ivi presentata come un naturale prodotto dell'aritmetica ed è svolta, come gli autori ritengono debba essere, partendo dalla formola. Per i bisogni dell'algebra che ha l'artigiano e l'uomo d'affari, è la formola piuttosto che l'equazione che s'incontra ed è la formola che illustra meglio la natura dell'argomento. L'equazione è il prodotto logico e naturale della formola e come tale dev'essere sviluppata ».

La più essenziale innovazione che si nota in questo libro in paragone degli antichi sistemi consiste nella metodica introduzione dei « grafici » sin dal principio; parliamo dei grafici ordinari, basati sulla considerazione di coordinate cartesiane ortogonali; ma poichè gli autori si preoccupano tanto delle esigenze della pratica, avrebbero potuto aggiungere qualche cenno e qualche figura sui grafici in coordinate polari, chè essi furono già introdotti in alcune applicazioni e sembrano chiamati a un bell'avvenire.

Gli autori, uno dei quali è inglese e l'altro americano, adottarono i costumi anglo-sassoni moltiplicando gli esercizi proposti sicchè questi formano una collezione richissima e svariata (1). Si preoccuparono meno della parte filosofica dell'algebra, come sta a provarlo ad esempio l'avere essi presentati gli esponenti frazionari, non come una convenzione, ma come una conseguenza inevitabile delle regole dell'algebra, e l'avere ommessa la teoria generale degli irrazionali.

La I Parte parla soltanto di equazioni lineari, ed arriva

(1) In un fascicolo pubblicato poi a parte col titolo *Answers Elements of Algebra. Part I* sono indicati i risultati delle questioni annunciate nel testo.

Digitized by Google

sino ai logaritmi; si chiude con una breve storia dell'algebra e con alcune tavole numeriche disposte in modo così sapientemente economico da abbracciare molto in solo 20 pagine. che si trovano ripetute alla fine della II Parte. Questa poi contiene una teoria elementare dei radicali, le equazioni quadratiche e relativi sistemi, i rapporti e le proporzioni, gli elementi della analisi combinatoria, il teorema del binomio per esponenti interi e gli elementi della teoria dei logaritmi.

Raccomandiamo questo scritto agli insegnanti delle nostre scuole medie, chè la condizione di cose descritta nella surriferita prefazione non è esclusiva ai paesi ove il *yes* suona.

G. L.

Geometria elementare.

G. St. L. Carson and Davis Eugene Smith, *Plane Geometry Part I.* London, Boston, New-York, Chicago, Ginn. & Comp. (senza data; giunto al *Bollettino* in Aprile 1915), 8°. p. VI. + 1-266; Part. II, (giunta in Luglio 1915). 8° p. 259 - 494.

Le prefazioni in generale, e specialmente quelle dei manuali scolastici, sono destinate a non venire lette da alcuno; tuttavia sono esse che permettono di formarsi agevolmente un concetto adeguato dei criteri che ispirarono gli autori. Onde crediamo opportuno di riferire quella con cui si apre il presente volume, che viene a fare il " pendant „ ad altro consacrato sull'algebra, di cui fu reso conto nelle pagine precedenti.

" Fra le leggi che sembrano governare in generale il progresso nei metodi didattici nessuna riceve più frequenti illustrazioni di quella che può chiamarsi la Legge degli Estremi. Ogni qualvolta vengano troncati i fili che legano la scuola ad una tradizione solidamente stabilita, la scuola collegata precipita a terra e cade in uno stato di grande confusione. Ciò accadde quando nell'aritmetica furono per la prima volta introdotte le definizioni dei termini tecnici, quando i simboli algebrici furono applicati nell'arte del calcolo, quando le regole cominciarono a dominare l'istruzione nell'aritmetica elementare, quando l'algebra formale cominciò ad assumere la debita importanza e quando la notazione flussionale guidò a quella del calcolo differenziale.

" Ora questi ultimi anni hanno dato una riprova di tale legge rispetto alla geometria. I fili che legavano le scuole all'antico

Digitized by Google

testo di Euclide furono spezzati, ed anche parecchi di coloro favorevoli a tale distacco sono caduti nella confusione che tanto spesso accompagna siffatti cambiamenti. Tuttavia, se si esaminano le ragioni del mutamento, si trova che quel turbamento risiede, non nello spirito euclideo, ma nell'incapacità di molti insegnanti di adattare tale spirito alle scuole ed alle condizioni moderne. Gli *Elementi*, essendo stati scritti per Greci già adulti (?), non possono venire seguiti da un giovanotto o da una giovanetta che studiò geometria in una scuola odierna; ma ciò non significa in alcun modo che lo spirito geometrico, e quello di Euclide, debba abbandonarci.

" La presente opera si apre con un corso propedeutico destinato a svolgere la facoltà d'immaginazione di cose ed idee già famigliari all'alunno. Inoltre si propone di mostrare il significato e la necessità di una discussione più razionale dell'argomento. Finalmente le proposizioni fondamentali, con le loro dimostrazioni, sono stabilite chiaramente nell'ordine logico, con un numero di esercizi sufficienti per abilitare qualunque studente ad impadronirsi piuttosto del vero spirito geometrico che della semplice lettera d'un testo formale.

Nei loro sforzi di combinare la realtà con l'ordine logico gli autori hanno introdotte due innovazioni ai procedimenti consueti. Anzitutto il corso introduttorio sviluppa successivamente le idee di posizione, forma e grandezza, sistematizzando ed estendendo concetti già esistenti nell'alunno. Secondariamente, una certa elasticità riguardo ai postulati viene assicurata osservando che certe proposizioni dimostrate nel testo possono assumersi come postulati in una prima lettura e suggerendo che certi postulati assunti nel testo si possono dedurre da altri in una seconda lettura. Vari insegnanti potranno, con vantaggio, adottare sistemi diversi, ma gli autori ritengono che in complesso, nessuna proposizione accettabile come evidente in un primo studio debba dimostrarsi in una prima lettura, e che in una seconda il meglio sia di adottare l'ordinamento del testo „.

Conformemente a siffatti criteri questo I Vol. dell'opera dei sig. Carson e Smith comprende un'introduzione divisa in due Capitoli (Prime idee geometriche, Geometria formale, cioè razionale) e poi i fondamenti della Geometria piana, divisi in due libri, uno destinato alle Figure rettilinee, l'altro ai Poligoni equivalenti; rileviamo ivi soltanto alcune felici modificazioni a

Digitized by Google

ragionamenti in uso, che ci sembrano degne di nota; ad es. una dimostrazione della relazione fra gli elementi di un triangolo piano equivalente al teorema del coseno, la quale è l'estensione di quella con cui Euclide stabilisce il teorema di Pitagora.

Il libro si chiude con una brevissima storia della geometria. È questa un'innovazione che riscuoterà l'approvazione di tutti; soltanto ci sembra che si poteva rimandarla al momento in cui fosse esaurita l'esposizione di tutta la geometria; allora il discepolo sarebbe stato in grado di meglio comprenderla e gustarla, di quanto si trovi al punto d'istruzione a cui fu condotto dagli autori in questo Vol. In vista di nuove edizioni, che certamente non mancheranno, ci sia lecita qualche critica speciale.

Fra le scoperte fatte nella scuola pitagorica non si può dimenticare quella dei poliedri regolari convessi. Parlando del metodo di esaustione andrebbe ricordato Eudosso da Cnido, a cui si deve il V Libro di Euclide nonchè la cubatura della piramide e del cono. Nei metodi di costruzione dei triangoli rettangoli in numeri ideati da Pitagora e Platone, bisogna avvertire che il primo parte da un numero dispari ed il secondo da uno pari, onde si completano mutuamente. Gli *Elementi* di Euclide sono il più antico trattato di matematica *ancora esistente*, ma non il primo che *sia stato scritto*. Una menzione si deve fare anche di Pappo, nella cui *Collezione matematica* molte pagine concernono la geometria elementare; vi si trova ad es. l'estensione del teorema di Pitagora a triangoli qualunque. Parlando degli Indiani, sarebbe da citare la formola da essi scoperta che dà l'area di un quadrangolo inscrittibile in funzione dei lati, formola che è la generalizzazione di quella prima citata di Erone, che serve a calcolare l'area di un triangolo in funzione dei lati. Finalmente dovrebbero venire ricordate due modificazioni proposte da Tartaglia e Mascheroni ai postulati di costruzione fissati da Euclide; il primo suggerì di usare soltanto un compasso ad apertura fissa, il secondo di bandire l'uso della riga: ebbero così origine due nuovi interessanti sistemi di costruzioni geometriche che costituiscono un notevole progresso per la geometria elementare.

La II parte del trattato in esame è divisa in quattro libri in cui sono svolti risp. i seguenti argomenti: *Il cerchio*, *Rapporti e proporzioni*, *Poligoni simili*, *Poligoni regolari*; segue un'*Appendice* ove sono trattate alcune questioni più elevate, cioè gli elementi della teoria geometrica dei massimi e minimi ed il calcolo

Digitized by Google

della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio. Un'analisi completa dell'opera dovrebbe dar notizia di tutte le innovazioni proposte le quali sono numerose e degne di venire notate; tale analisi non essendoci concessa, limitiamoci e rilevare che nella teoria dei rapporti e delle proporzioni di ogni teorema vengono indicate due dimostrazioni, una applicabile a grandezze razionali, l'altra necessaria nell'ipotesi contraria.

Se, come crediamo, un trattato congenere verrà dedicato alla geometria dello spazio, i nostri lettori ne saranno da noi certamente informati. G. L.

Attualità.

Annuaire pour l'an 1916 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques Paris, Gauthier - Villars et C. Prezzo fr. 1,50.

Oltre alle solite rubriche, di cui è superfluo vantare la grande utilità, il presente volume contiene i due seguenti scritti originali:

G. Bigourdan, *La pression barométrique moyenne et le régime des vents en France.*

E. Picard, *Notice sur le commandant Gugou* (n. a Fontainebleau il 25 Novembre 1843, m. in Bretagna il 25 Agosto 1915).

G. L.

Notizie.

Per la storia della teoria delle trasformazioni di contatto. La società matematica tedesca ha pubblicato come V dei volumi complementari dei suoi " Jahresberichte „ un volume intitolato *Die Berührungstransformationen, Geschichte und Invariantentheorie* (Leipzig, Teubner 1914), ove sono riuniti due rapporti scritti per suo incarico, uno da H. Liebmann, l'altro da F. Engel, che vanno raccomandati a tutti coloro che s'interessano alle teorie che portano il nome di S. Lie. Particolarmente importante è il secondo, nel quale il fido collaboratore dell'eminente matematico norvegese dà notizia di un nuovo assetto che si può dare alla teoria delle trasformazioni di contatto applicando principi e concetti di altra provenienza, alcuni dei quali, dovuti a S. Kantor, erano sinora passati totalmente inosservati, forse per la forma confusa e scorretta in cui furono presentati.

Digitized by Google

***

RUGGERO BACONE, IL METODO SPERIMENTALE E GALILEO. È questo il titolo di un esteso ed elaboratissimo scritto (pubblicato fra le *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, II Ser., T. LXV, 1915) con cui il prof. I. Guareschi volle e seppe dimostrare che l'Italia non era indifferente alle onoranze progettate per ricordare il VII centenario della nascita di R. Bacone (cfr. *Bollettino*, T. XVI, 1914, p. 96). Con grande dottrina e non minore indipendenza di giudizio egli ha valutata l'opera scientifica e messo in luce il carattere adamantino dell'eminente monaco inglese. Questi per primo ha scossa l'autorità aristotelica e predicò, in tempi di piena scolastica, l'osservazione e l'esperienza, onde si può considerare come il primo e più grande libero pensatore che sia apparso nel Medio Evo; ma (pensa a ragione il Guareschi) non ha fondato e rinnovato il metodo sperimentale, merito che spetta in grandissima parte a Galileo Galilei.

***

IL POSTO ACCORDATO AI MATEMATICI IN UNA RACCOLTA DI CLASSICI. Qualche tempo fa i giornali americani annunciarono che il dott. C. W. Elliot si proponeva di pubblicare una raccolta di volumi, capaci di riempire un palchetto lungo 5 piedi (circa M. 1,50; donde il nome " Five-foot Shelf of Books " dato alla raccolta), e tali che la loro ripetuta lettura bastasse a somministrare gli elementi essenziali di un'educazione liberale ad una persona in grado di dedicare allo studio non più di 15' al giorno. Tale impresa venne assunta dalla Casa F. P. Gollier & Sons, che, sotto il nome di " The Harvard Classics " ha già pubblicati 50 dei progettati volumi. Ora, fra questi, quattro contengono scritti di matematica o che ai matematici possono interessare; crediamo conveniente segnalare quali siano e che cosa racchiudano:

Vol. XXX: MEMORIE SCIENTIFICHE. Newcomb, " L'estensione dell'universo "; Faraday, " Le forze della materia "; Helmholtz, " La conservazione della forza "; Lord Kelvin, " La teoria ondulatoria della luce " e " Flussi e riflussi ".

Vol. XXIV: FILOSOFI FRANCESI ED INGLESI. Descartes, " Discorso sul metodo "; Voltaire, " Lettres philosophiques ".

Digitized by Google

Vol. XXXIX; Prefazioni famose. Copernico, Dedica delle " Rivoluzioni dei corpi celesti "; Newton, " Prefazione ai Principia ".

Vol. XLVIII. Tutto dedicato a B. Pascal, di cui sono riprodotti le " Pensées ", il saggio sopra lo " Spirito geometrico ", finalmente la Prefazione ed alcuni frammenti del trattato " Sul vuoto ".

***

Un importante carteggio scientifico. Nelle sedute che tenne l'Accademia delle Scienze di Parigi il 26 Luglio ed il 2 Agosto 1915, G. Bigourdan ha date particolareggiate informazioni intorno alle lettere scambiatesi fra J. N. Delisle e gli astronomi del tempo suo, che si conservano a Parigi: particolarmente notevoli sono quelle di Eulero, che certamente prenderanno posto nella corrispondenza scientifica di questo grande la quale verrà pubblicata nell'èdizione completa delle sue opere.

***

Tema proposto dalla R. Accademia di Danimarca. La letteratura scientifica conta già parecchi lavori relativi al quoziente di Fermat, cioè al numero $k_p(a)$ definito dal celebre teorema

$$a^{p-1} = 1 + p\,k_p(a),$$

ove p è un numero primo che non divide a. Ora le citate ricerche sono di natura abbastanza particolare ed è lecito supporre che delle indagini intraprese da punti di vista più generali, specie tenendo conto della decomposizione di $p - 1$ in fattori primi, possano procurare una conoscenza più profonda del quoziente di Fermat e fors' anche del problema proposto da Abel relativamente alla divisibilità di $k_p(a)$ per p. In conseguenza l'Accademia ha deliberato di conferire la propria medaglia d'oro (del valore di 320 corone, pari a circa 420 fr.) a *uno studio che rappresenti un progresso essenziale nelle nostre cognizioni sul quoziente di Fermat.*

Le memorie dei concorrenti devono essere presentate entro il 31 Ottobre 1917 ed essere scritte in una delle seguenti lingue: danese, danese-norvegese, svedese, inglese, tedesco, francese, latino.

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 49-64.
Calcolo infinitesimale (G. L.), pag. 64.
Opere complete ed Enciclopedie (G. L.), pag. 65-66.
Storia (G. L.), pag. 66-70.
Esercizi (G. Vivanti), pag. 71-73.
Algebra elementare (G. L.), pag. 73-75.
Geometria elementare (G. L.), pag. 75-78.
Attualità (G. L.), pag. 78.
Notizie (Per la storia della teoria delle trasformazioni di contatto. Ruggero Bacone, il metodo sperimentale e Galileo. Il posto accordato ai matematici in una raccolta di classici. Un importante carteggio scientifico. Tema proposto dalla R. Accademia di Danimarca), pag. 78-80.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

Borel. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
Braude. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
Castelnuovo. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
Dolbnia J. — Oeuvres mathématiques publiées par Kriloff. L. 12,50.
Enriques. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
Guillaume. — Les récents progrès du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: Sanden. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: Hjelmslev. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
Hausdorff. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
Salpeter. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
Smith e Mikami. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
Zeuthen. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

RECENTISSIMA PUBBLICAZIONE

GUIDA ALLO STUDIO
DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

DEL

Prof. GINO LORIA

Prezzo del volume elegantemente rilegato L. 3.

MILANO
ULRICO HOEPLI

1916

Digitized by Google

329 11.394

N. 3 PERIODICO TRIMESTRALE 1916

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA

ANNO XVIII
1916

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1916

Pubblicato il 10 Agosto 1916.

Digitized by Google

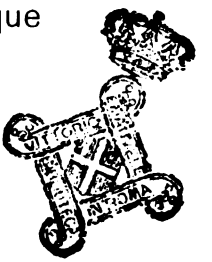
Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVIII, Fasc. III: **Luglio, Agosto, Settembre** 1916

La correspondance entre Ludwig Schäfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le
Dr. J. H. GRAF, *Professeur à l' Université de Berne*

(Cont. v. pag. 64)



N.° 39.

Zuz, 22 ottobre, 1882.

Mio ottimo Amico

Sento il bisogno di rinnovare per iscritto i ringraziamenti che vi espressi a voce per il grande regalo che faceste a me ed ai miei colleghi colla vostra venuta a Zuz. In iscritto mi è poi anche permesso di dire quello che non oserei a voce, cioè che, ogni nuova volta che ho la fortuna di stare in vostra compagnia sento sempre più crescere la stima e l'affetto verso la vostra persona, che mi era già carissima sino al primo anno in cui veniste al lago di Como.

Eugenia e Bianca, come mia zia Carolina e la sig.ª Vistarini, sentiranno vivissimo piacere nel ricevere i saluti che voi con tanta tenerezza m'avete incaricato di fare loro.

Mi è assai cara la speranza che ritornerà presto il tempo in cui potremo riunirci in qualche bel punto dei laghi lombardi.

Il rasserenamento di jeri mi fa ritenere che il viaggio da qui a Berna vi sarà riuscito felicemente. E voglio anche sperare che avrete quivi ritrovato l'amico, per il quale le vostre nobili parole ci hanno destato un profondo interessamento.

Avevo divisato di accompagnarvi a Bergün; ma le nubi m'hanno fatto rinunciare a questo mio piacere, per timore che il male ai denti mi si facesse troppo forte.

Abbiate maggior cura della vostra preziosa salute ed amate sempre

il vostro devotissimo ed amantissimo

F. CASORATI.

Digitized by Google

N.° 40.

Pavia, 3 dicembre 1883.

Mio carissimo Amico.

Vogliate perdonarmi, se, prima che le formalità dell'elezione sieno affatto compiute, io mi prendo il piacere di qualificarmi vostro collega nell'Accademia dei Lincei.

Quest'Accademia viene ora risguardata come la principale in Italia, come quella veramente nazionale; mentre l'Istituto Lombardo, l'Istituto Veneto, etc. hanno carattere piuttosto regionale. Il governo l'ha dotata più largamente delle altre e le ha assegnato uno dei più grandi palazzi di Roma, il palazzo del principe Corsini. Pochi mesi addietro è stato rinnovato il suo statuto, e deciso un'aumento nel numero dei soci, sì nazionali, che stranieri. Quindi si è anche stabilito di procedere alla elezione di parecchi soci stranieri simultaneamente.

A compiere un'elezione occorrono tre votazioni, delle quali la prima, comechè fatta dagli specialisti competenti, è la più importante. Ora tanto nella prima, come nella seconda, il vostro nome ha raccolto l'umaminità. Per ciò la terza votazione, che si sta facendo, può essere considerata come una pura formalità, ed io posso permettermi di comunicarvi che l'Accademia avrà presto l'onore di inscrivere tra i suoi il caro ed illustre vostro nome.

La mia salute è ora assai migliorata. Eugenia col suo sposo e Bianca stanno bene, e vi ringraziano con tutta l'anima delle affettuose parole che avete inviato all'occasione delle nozze.

Mi è caro sperare che anche la salute vostra sia buona; ad ogni modo permettete al vostro fedele amico di raccomandarvi ogni possibile cura, e di non affaticarvi troppo delle lezioni.

Sono col più vivo affetto

il vostro devotissimo

F. Casorati.

N.° 41.

Pavia, 4 gennaio 1885.

Ottimo Amico

Quale grata sorpresa: i ritratti e le righe del nostro amato Schläfli! Fu mia figlia Bianca che mi consegnò la lettera e di-

Digitized by Google

vise con me la dolce emozione di aprirla e contemplarne il contenuto.

Quando venne, Eugenia mi pregò e ripregò di regalare il ritratto piccolo a lei ed al suo sposo (G. A. Maggi), i cui studî gli permettono di apprezzare parecchi dei vostri lavori, mentre partecipa all'affetto, meritamente vivissimo, che tutti noi nutriamo per la vostra cara persona. Presto verrà a trovarci la sig.ª Vistarini, e godrà anch'essa moltissimo di rivedere le venerate sembianze e di sapersi sempre ricordata da voi.

Quello che dite della salute non mi soddisfa però abbastanza. Prendetevi tutti gli agi materiali, che si prendono giustamente le persone impegnate in studî faticosi; e non sacrificatevi *eccessivamente* per le lezioni. L'impegno che vi assumete. col lasciarvi indicare dagli studenti la materia da svolgere, è oltremodo grave; e non saprei dove trovare altro professore dell'alto insegnamento che faccia come voi.

Consulto anch'io i desiderî degli studenti; ma non li secondo in tutto e per tutto. Se, per esempio, mi trovo impegnato in qualche ricerca originale, prendo da questa la materia per una parte delle lezioni.

Io sto bene di *salute* (direi) *grossolana*; ma non abbastanza per studiare molto, con efficacia e senza danno. Da due anni, o forse tre, in quà continuai a sentirmi agitazione nervosa e a divenire sempre meno contento di me. Però da un pajo di mesi sembrami cominciato un ritorno al meglio, e quindi spero che l'aria e le distrazioni alpine (mancatemi nell'84) mi ricondurranno nell'85 a condizione soddisfacente.

Godo di sapere il prof. M. A. Stern in buon stato; vi prego di riverirlo affettuosamente da parte mia.

Aggradite il ricambio degli augurî da parte mia e delle mie figlie ed i ringraziamenti pei ritratti e l'espressione del desiderio vivissimo di rivedere l'originale di questi.

Sono con profondissima stima

il vostro devoto amico

F. Casorati.

(*Continua*)

Digitized by Google

Geometria analitica.

Luigi Bianchi. — *Lezioni di Geometria analitica* Pisa. Enrico Spoerri, editore, 1915. 8° gr. p. 604 (Prezzo L. 22).

Studiare la Geometria mediante l'Algebra è programma comune ad ogni trattato di « Geometria analitica »: però ben di rado come in queste « *Lezioni* » esso è strettamente attuato. Anche quando sembrerebbe che le considerazioni sintetiche fossero, quà e là, più appropriate dell'algoritmo algebrico, è sempre questo che prevale come strumento quasi esclusivo d'indagine. È dunque, anzitutto, pregio principale del libro che stiamo esaminando, una grande omogeneità di trattazione e di svolgimento.

L'opera si compone di tre parti. Nella prima si espongono i varii metodi di coordinate, sviluppando principalmente il Cartesiano (ma non escludendo le coordinate proiettive) e applicandoli poi tutti alle questioni più fondamentali. Apprestati così gli strumenti di ricerca essi vengono dedicati allo studio delle coniche, nella seconda parte del libro, e a quello delle quadriche, nella terza.

Un' appendice « sulle forme quadratiche » a cui l'A. si richiama ogni volta che gli occorre, gli permette di risparmiare le ripetizioni che altrimenti sarebbero inevitabili trattando certe questioni che in sostanza sono identiche tanto per le coniche, quanto per le quadriche.

Delineate, in tal guisa, le tre grandi divisioni del libro, passeremo adesso a trattare del contenuto seguendone lo svolgimento nei varii capitoli in cui ogni parte è suddivisa.

*
* *

Alla prima parte, composta di dieci capitoli, l'A. premette alcune pagine d'introduzione presentando al lettore le forme geometriche fondamentali, gli elementi impropri e le operazioni di proiezione e sezione, dopo di che, entrando nel buono dell'opera, incomincia il primo capitolo destinato alle coordinate sulle forme di prima specie e specialmente sulla retta. La sostanza delle cose ivi esposte è costituita dalla nozione e dalla teoria del birapporto di un gruppo ordinato di quattro elementi di una forma di prima specie, alla quale nozione viene utilmente premessa quella del rapporto semplice di tre punti presi in un de-

Digitized by Google

terminato ordine: viene considerato naturalmente il caso speciale del gruppo armonico, tralasciando però di darne la consueta costruzione mediante il quadrangolo completo. Sebbene essa appartenga essenzialmente al campo grafico pure (data la sua semplicità e importanza) sarebbe stato utile di indicarla. Il capitolo termina con un accenno alla proiettività fra forme di prima specie, la quale proiettività verrà poi ripresa, con la dovuta maggiore ampiezza, sulla fine della prima parte.

Il capitolo II è specialmente destinato ai varii sistemi più in uso per lo studio delle proprietà metriche delle figure piane e quindi la più larga parte è fatta al sistema Cartesiano. Le relative formule per la trasformazione delle coordinate sono trattate in modo più ampio del consueto e recano la discussione di molti casi particolari.

Nel capitolo III vengono considerati gli esempi più semplici ed espressivi di luoghi geometrici piani rappresentati analiticamente da equazioni nelle coordinate di un punto generico del luogo. Dalla retta si passa al cerchio, all'ellisse, all'iperbole, alla parabola, per arrivare poi ai concetti più generali intorno alla rappresentazione analitica di curve piane, Non è trascurata la rappresentazione in forma parametrica dando, come esempio, quello delle tre specie di coniche, anche per porre in evidenza la loro razionalità. Sono pure considerate: la sinusoide, la curva esponenziale, le cicloidi, la lemniscata, la spirale d'Archimede ecc. Il capitolo ha termine con alcune considerazioni riassuntive intorno alle curve rappresentate, distinguendo le algebriche dalle trascendenti.

Le equazioni lineari, in due incognite, vengono interpretate nel capitolo IV per risolvere, nel piano, i problemi elementari metrici e di posizione intorno a punti e rette (allineamenti, angoli, distanze ecc. ecc).

Nel capitolo V l'A. comincia ad estendere allo spazio i concetti svolti sin qui nel piano, valendosi delle coordinate Cartesiane e proseguendo, più brevemente, con le polari e le cilindriche. Vengono trattate così le prime questioni intorno ai coseni di direzione, alle formule per la trasformazione delle coordinate, agli angoli di Eulero ecc. Sono da segnalare le formule fondamentali di trigonometria sferica desunte da quelle, già in antecedenza stabilite, intorno ai coseni direttori.

Digitized by Google

Continuando a sviluppare la Geometria analitica dello spazio parallelamente a quella del piano, l'A. nel capitolo VI passa alla rappresentazione analitica delle superficie e delle curve gobbe. Gli esempi addotti, per le superficie, sono anzitutto i coni e i cilindri, poi quelle di rotazione e di traslazione; per le curve gobbe è scelto come esempio particolare l'elica circolare di cui vien data una rappresentazione parametrica.

I due capitoli seguenti (il VII e l'VIII) sono destinati alla interpretazione geometrica, nello spazio, delle equazioni lineari in tre incognite e quindi ai piani e alle rette. Si risolvono, per tal guisa, i principali problemi metrici e di posizione inerenti a punti, rette e piani nello spazio, soffermandosi specialmente sulle condizioni di ortogonalità, di parallelismo ecc. Sono notevoli due formule semplici: l'una per la minima di stanza di due rette sghembe e l'altra per la distanza da un punto ad una retta.

Rimangono da riassumere, della prima parte, gli ultimi due capitoli (IX e X) dedicati allo studio analitico delle proprietà proiettive. Nel primo di essi si appresta lo strumento di studio (cioè le coordinate proiettive) per quello che è argomento del secondo, ossia la proiettività sulle forme di 1ª e 2ª specie. Dal punto di vista geometrico sono questi due capitoli fra i migliori dell'opera, così dal consigliarne il riassunto con qualche maggior dettaglio. Nel capitolo IX si incomincia dal rilevare la inettitudine del sistema Cartesiano, nel piano, a rappresentare analiticamente i punti impropri. Vi si rimedia introducendo ciò che l'A. chiama coordinate Cartesiane omogenee di punto, le quali vengono definite semplicemente come tre numeri x_1, x_2, x_3, di cui i rapporti dei primi due al terzo non sono altro che le coordinate Cartesiane del punto medesimo. Per tal guisa i punti impropri del piano-ambiente vengono caratterizzati dall'aver nulla la terza coordinata x_3. Ridotta omogenea, in conseguenza, l'equazione della retta (sostituendo a x, y, rispettivamente $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ e dopo moltiplicando per x_3), l'A. chiama coordinate omogenee cartesiane di retta i coefficienti di x_1, x_2, x_3, nella sua equazione, notando subito che la retta impropria viene così ad essere rappresentata da $x_3 = 0$.

In modo perfettamente analogo si stabiliscono le coordinate Cartesiane omogenee di punto e di piano nello spazio.

Digitized by Google

Introdotti poi algebricamente gli elementi immaginari, l'A. passa a stabilire, mediante una sostituzione lineare, i sistemi più generali di coordinate proiettive e li applica allo studio delle curve nel piano, o delle superficie nello spazio, rappresentando tali enti geometrici con l'annullarsi di forme algebriche rispettivamente ternarie e quaternarie. Se le variabili relative si interpretano come coordinate di punto si avranno le curve-luogo e le superficie-luogo, se s'interpretano come coordinate di retta, o di piano, si avranno le curve e superficie-inviluppo.

I sistemi più generali di coordinate proiettive omogenee, così introdotti, vengono applicati, come già dicemmo, nel capitolo X, allo studio delle omografie. L'A. comincia dal campo binario, cioè dalle forme di prima specie mettendo in evidenza la relazione bilineare, o la sostituzione lineare binaria, quale rappresentante analitica della proiettività. Nel caso di forme sovrapposte il segno del modulo della sostituzione acquista un notevole significato geometrico, giacchè l'A. dimostra che a seconda che esso è positivo, o negativo, la proiettività è concorde, o discorde. Segue poi la ricerca degli elementi uniti, la forma normale per la rappresentazione analitica della proiettività ecc. ecc. Nel paragrafo dell'involuzione sono da notare le considerazioni sulle proiettività cicliche e la conclusione che quelle di esse reali e iperboliche sono soltanto le involuzioni. Dalle involuzioni ortogonali di raggi l'A. fa discendere il concetto di punti ciclici del piano e la conseguente definizione, dovuta a Laguerre, dell'angolo di due rette. Nel campo ternario l'A. interpreta, nel modo consueto, la sostituzione lineare, a modulo non nullo, come una proiettività fra due piani distinguendo il caso della collineazione da quello della reciprocità, a seconda che la sostituzione opera sopra coordinate dello stesso nome, o di nome contrario. Seguono infine le usuali questioni intorno agli elementi uniti e sopra le collineazioni particolari dal punto di vista proiettivo, o metrico (omologie generiche, omologie armoniche, similitudini, movimenti ecc. ecc.).

*
* *

Siamo alla seconda parte del libro tutta dedicata allo studio delle coniche e suddivisa in quattro capitoli. Nel primo di essi (XI dell'opera) sono riunite le proprietà proiettive di tali curve e lo strumento di studio è costituito, naturalmente, dalle coordi-

Digitized by Google

nate proiettive omogenee. Vi è da notare una semplice dimostrazione analitica (forse nuova) del teorema di Pascal conseguita assumendo in quattro vertici dell'esagono i quattro punti di riferimento (cioè i tre fondamentali e il punto unità). Tale semplicità di rappresentazione permette rapidamente di far vedere che la condizione analitica affinchè i sei vertici stieno su di una stessa conica, è identica con qnella che esprime l'allineamento dei tre punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti. E così viene dimostrato contemporaneamente che la condizione dell'allineamento suddetto è insieme necessaria e sufficiente per la iscrittibilità dell'esagono nella conica (nelle altre consuete dimostrazioni si è quasi sempre obbligati a separare in due diverse proposizioni il teorema dell'esagrammo: quella inerente al « carattere necessario » e l'altra inerente al « carattere sufficiente »). Un altro punto notevole di questo capitolo è la rappresentazione analitica del gruppo di collineazioni piane che trasformano una conica in se stessa. Perchè questa rappresentazione (generalmente dimenticata nei trattati) assuma la forma più semplice possibile, l'A. ricorre a una delle equazioni normali già date per le coniche (quella il cui triangolo fondamentale è costituito da due tangenti della curva e dalla relativa corda di contatto). Questa medesima forma normale giova all'A. per trattare, in fine al capitolo, il problema delle intersezioni di due coniche da cui, in particolare, resulta la nota costruzione del cerchio osculatore.

Esaurita così la trattazione proiettiva delle coniche, l'A. passa alle proprietà metriche. Nei capitoli XII e XIII, tornando a coordinate Cartesiane, vengono svolte le proprietà inerenti al centro, ai diametri, assi, asintoti e alle forme ridotte delle equazioni relative tanto per le coniche centrali, quanto per la parabola. Dalla rappresentazione parametrica dell'ellisse, mediante l'anomalia eccentrica, si desume una semplice condizione affinchè quattro punti della curva esistano su di un medesimo cerchio (la somma delle anomalie eccentriche relative deve equivalere a uno, o più giri) e il noto teorema di Steiner intorno ai tre cerchi osculatori passanti per uno stesso punto dell'ellisse.

Il capitolo XIV è dedicato per intiero alle proprietà focali delle coniche. Definito un fuoco quale centro di una involuzione ortogonale di raggi coniugati rispetto alla conica, l'A. collega questa definizione a quella che dipende dai punti ciclici del

Digitized by Google

piano-ambiente. Per trovare le coordinate dei fuochi così definite, l'A. si parte dal determinare, per un punto qualsiasi del piano, i coefficienti angolari delle due direzioni principali che vi passano: esigendo che queste direzioni sieno più di due, e quindi infinite, il punto sarà un fuoco e lo scopo è subito raggiunto. Seguono poi le consuete proprietà focali angolari e segmentarie e, in ultimo, dalla equazione polare delle coniche vengono dedotte le proprietà più notevoli delle coniche simili.

*
* *

I rimanenti cinque capitoli dell'opera compongono la terza parte, destinata completamente allo studio delle quadriche. L'A. comincia dalle proprietà proiettive dedicandovi un capitolo (il XV). L'aver riunito nell'appendice la teoria delle forme quadratiche, con qualsiasi numero di variabili, e l'uso già introdotto delle coordinate omogenee, anche nello spazio, permette all'A. di trattare, in modo più rapido del solito, il caso riducibile (coni, cilindri quadrici e coppie di piani). Stabilita poi l'equazione del piano tangente e la conseguente distinzione di punti delle quadriche (ellittici, parabolici e iperbolici), l'A. dimostra come dal segno del discriminante si deduca assai semplicemente la nota proprietà che su di una stessa quadrica i punti sono della medesima specie. Il capitolo termina con la teoria della polarità rispetto a una quadrica propria e con la conseguente forma canonica acquisita dalla equazione relativa allorchè la superficie viene rlferita a un suo tetraedro auto-coniugato.

Le proprietà diametrali delle quadriche sono riunite nel capitolo XVI ed è quindi in questo capitolo che l'A. si pone il problema delle direzioni principali traducendolo analiticamente nella ben nota equazione secolare. Premessa la invariabilità di questa equazione per trasformazioni di assi, l'A. presenta una dimostrazione della realtà delle radici, che è di gran lunga più semplice fra le molte conosciute, così da giudicare opportuno di segnalarla al lettore riproducendola qui brevemente. Tralasciato il caso ovvio delle radici multiple, in cui il teorema è evidente, l'A. osserva che alla radice reale ϱ_1, necessariamente esistente, giacchè il grado è dispari, corrisponde una direzione principale reale. Disponendo allora l'asse delle x secondo questa direzione deve essere $a_{11} = \varrho_1$; $a_{12} = a_{13} = 0$ e l'equazione seco-

Digitized by Google

lare diviene:

$$\begin{vmatrix} \varrho - \varrho_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

per cui le rimanenti radici sono quelle della equazione di secondo grado:

$$\begin{vmatrix} a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

le quali radici sono certamente reali, perchè il discriminante può scriversi sotto la forma:

$$(a_{22} - a_{33})^2 + (2\, a_{23})^2$$

e quindi, come somma di quadrati, è positivo. Con ciò la dimostrazione è fatta: ha il solo difetto che non si può estendere al caso generico, ma per le quadriche basta. Del resto, per il caso generale, l'A. ne presenta un'altra, nell'appendice, che sopra le molte conosciute, ha ancora il pregio della maggiore semplicità. Il capitolo attuale ha fine con le equazioni normali delle quadriche e la conseguente classificazione dal punto di vista metrico.

Nel successivo si studia la forma delle specie dianzi classificate cominciando da quelle di rotazione. Premessa la nozione dell'assoluto dello spazio, la condizione perchè una quadrica sia rotonda si esprime esigendo che sia bitangente all'assoluto. Ammettendo questa condizione, l'A. passa a descrivere le quadriche rotonde dividendole in cinque specie e cioè: i due ellissoidi (l'allungato e lo schiacciato), i due iperboloidi (a una e due falde) e il paraboloide ellittico. Da queste si viene alle forme più generali di quadriche qualsiasi le quali vengono descritte dall'A. in base alle loro proprietà metriche più espressive. Si presenta quindi naturale, a questo punto, il problema delle sezioni circolari e degli ombelichi, il quale dapprima viene trattato indipendentemente dall'assoluto e se ne deducono notevoli proprietà sulle reti deformabili di tali sezioni. Ripreso poi il problema (in fine del capitolo), e collegato coll'assoluto, vengono ritrovati e confermati i resultati prima conseguiti.

Nel capitolo XVIII l'A. si dedica allo studio delle quadriche rigate proprie e specialmente alle due serie rigate di cui ogni tal quadrica è sostegno. Vi è da notare una rappresentazione

Digitized by Google

parametrica di queste superficie in coordinate asintotiche. La teoria delle reti deformabili, già svolta nel capitolo precedente, trova adesso una interessante applicazione ai paraboloidi e iperboloidi articolati.

Le proprietà focali delle quadriche sono riunite nell' ultimo capitolo (il XIX) e vi sono sviluppate anche più ampiamente del consueto. Stabilita per ogni punto dello spazio la esistenza di un triedro di direzioni principali col vertice nel punto, si presenta la questione di esaminare se esistono punti speciali per cui tali triedri sieno più d'uno e quindi infiniti: questi punti speciali saranno i fuochi, riservando il nome di fuoco principale al caso particolarissimo in cui ogni direzione uscente dal punto sia principale (quadriche rotonde). Si perviene così all'esistenza di infiniti fuochi il cui luogo è costituito dalle coniche focali della quadrica, mentre le tangenti di queste coniche costituiscono gli assi focali e le rispettive polari reciproche le direttrici. A questo punto viene presentato il problema del luogo dei vertici dei coni rotondi proiettanti una data conica dalla cui risoluzione discende la esistenza delle coppie di coniche focali. Le considerazioni già svolte nel piano intorno alle schiere di coniche omofocali vengono estese, nello spazio, alle schiere di quadriche confocali mettendone bene in evidenza il carattere di sistemi tripli e ortogonali. Il capitolo ha termine con lo studio delle linee e raggi di curvatura di una quadrica e con qualche particolare considerazione sopra le quadriche equilatere.

L'appendice sulle forme quadratiche, a qualsiasi numero di variabili, permette all'A., come già abbiamo ripetutamente osservato, di risparmiare varie considerazioni che altrimenti andrebbero sparse quà e là nel libro, o ripetute, o svolte in circostanze particolari. Ne è esempio tipico la dimostrazione dell' invariabilità del segno del discriminante di una conica, o di una quadrica, per trasformazioni di assi. L'A. abbandonando le consuete dimostrazioni, nel piano e nello spazio, riguarda tutto ciò come un caso particolare del teorema algebrico sulle forme quadratiche il quale afferma che il discriminante si riproduce, per effetto di una sostituzione lineare, a meno di un fattore che è il quadrato del modulo della sostituzione. Altrettanto accade circa alla discussione dei casi di coniche e quadriche degeneri, o riducibili, i quali si riassumono e, per così dire, si rispecchiano nelle forme quadratiche a discriminante nullo secondo una certa caratteri-

Digitized by Google

stica. Segue poi il problema della riduzione alla forma canonica e la conseguente equazione secolare di cui si dimostra la realtà delle radici nel modo più generale possibile e con la maggiore semplicità (come già abbiamo avuto occasione di dichiarare). Fatta la distinzione in forme indefinite, definite e semi-definite e presentato il concetto d'indice, viene enunciata e dimostrata la legge d'inerzia. Così anche l'appendice ha fine. Ne è tale la importanza che sarebbe stato consigliabile di porla in principio al libro esortando subito il giovane lettore a non trascurarne la lettura, dichiarandola essenziale per la maggiore intelligenza di tutta l'opera.

***

In tal guisa l'esame del libro è finito. Il chiaro A. non ha certo bisogno delle nostre lodi perchè le sue benemerenze verso l'alto insegnamento matematico siano ancora una volta affermate! In ogni modo noi siamo ben lieti di dichiararle anche in questa occasione. Come già dicemmo in principio, e come il titolo promette, lo strumento e il metodo dell'indagine è sempre, e quasi esclusivamente, l'analitico. L'A. sa piegarlo alle esigenze più svariate trovando sempre il modo più economico di servirsene: mai sfoggio inutile di formule, o di virtuosismo algebrico. È sempre il principio del minimo mezzo quello costantemente applicato, sicchè sarebbe difficile suggerire, in qualche punto, una semplificazione ai calcoli presentati.

Due sole osservazioni da aggiungere. Una consiste in questo: dato che il libro tratta analiticamente anche gli argomenti che di solito si svolgono nel corso di Geometria proiettiva, sarebbe stato utile destinare un capitolo alle collineazioni spaziali: il compito relativo sarebbe stato lieve in causa del precedente sviluppo delle coordinate proiettive nello spazio.

La seconda osservazione deve constatare la mancanza degli esercizi. Il difetto non è piccolo per un'opera dedicata agli studenti del 1° biennio universitario di matematica (data la mole e l'abbondanza degli argomenti svolti, non oseremmo dire che il volume attuale debba servire soltanto per il 1° anno di corso). Ma a questa mancanza l'A. potrà facilmente rimediare, in una prossima edizione, corredando ogni capitolo di una serie appropriata di esercizi e problemi quale Egli può preparare nel modo il piú acconcio e il più degno.

EDGARDO CIANI.

Digitized by Google

Calcolo delle Variazioni.

E. E. Levi, *Elementi della teoria delle funzioni e calcolo delle variazioni. Lezioni* (litografate) *di analisi superiore dettate nella R. Università di Genova nell'anno accademico 1914-15* (Genova, 1915).

Questo corso di lezioni è un libro assai notevole per la novità delle idee che vengono coordinate in un trattato, e per l'originalità e genialità della veste data ad alcune delle più moderne concezioni matematiche. È ben nota quale profonda innovazione abbiano all'analisi matematica apportato la teoria delle equazioni integrali, degli integrali del Lebesgue, del principio di minimo. Questi studii, iniziati per risolvere determinati problemi, hanno dato origine a ricerche che hanno tra di loro i più numerosi punti di contatto. Esse hanno posto in nuova luce interi capitoli di analisi, ed hanno potentemente contribuito a creare quel calcolo funzionale, già da tanti matematici intravisto, ma che oggi si avvia rapidamente a diventare un corpo di dottrine organico, intimamente connesso a tanti problemi classici di importanza fondamentale!

Dare una rapida scorsa in questo campo di studii, raccogliendo ampia messe di risultati analitici, organizzare questi risultati che, a un esame sommario, potrebbero sembrare affatto indipendenti l'uno dall'altro, mostrare invece quanto intimi sieno i legami fra tante dottrine: ecco lo scopo cui ha mirato l'Autore.

Molti risultati sono essenzialmente nuovi; molte volte sono affatto nuove le dimostrazioni. Questa recensione non può dare che una pallida idea dell'opera del Levi. Solo un'attenta lettura può fare risaltare i meriti di questo libro poderoso. Chiudo con l'augurio che tale corso veda presto la luce in una edizione più accessibile agli studiosi, in modo che tanti e tanti capitoli possano ricevere quel più ampio svolgimento che merita la loro importanza, e che in un corso di lezioni non possono ricevere assolutamente.

E ora comincio una rapida scorsa per i varii paragrafi, cercando di porre in luce alcuni dei punti più notevoli.

Premesse alcune considerazioni sul significato più generale che possono assumere le parole: *variabile*, *funzione*, campo di variabilità o dominio di una funzione, corrispondenza, ecc., si

Digitized by Google

passa nel § 2 a dare le definizioni e i primi teoremi sulla potenza di un aggregato, con particolare riguardo agli aggregati numerabili, e agli aggregati che hanno la potenza del continuo.

Nel § 3 si pone in luce quanta importanza abbia per una classe F di enti a il concetto di intorno di un ente a di F; facendo notare che si può chiamare intorno di un a ogni sistema di enti tale che:

1°) Ogni intorno di a contiene a e non soltanto a.

2°) Due intorni di a hanno una parte comune contenente un intorno.

3°) Dati due enti a', a'' distinti di F, si può trovare un intorno di a', e un intorno di a'' senza enti comuni.

Per i punti di una retta o di uno spazio ad n dimensioni gli intorni, così come sono concepiti abitualmente, soddisfano alle tre proprietà precedenti; cosicchè si possono conservare le solite definizioni di intorno. Un punto A si dirà punto derivato di un insieme E di punti di una retta o di uno spazio ad n dimensioni, se *in ogni intorno* di A esistono punti di E *diversi* da A. (Resta così affermato, per le possibili generalizzazioni, la dipendenza del concetto di punto di A derivato di un insieme E dalla definizione di *intorno* di un punto A). Premessi altri teoremi su cui qui sorvoliamo, si parla rapidamente di gruppi chiusi, densi, perfetti. Dal lemma di Heine-Borel per gli aggregati limitati e chiusi dello spazio ad n dimensioni si deduce il teorema che ogni insieme limitato contenente infiniti punti ha almeno un punto limite.

L'A. addotta una geniale definizione di limite dovuta al fratello prof. B. Levi [la quale ancora dipende dalla definiz. di intorno].

Sia data una famiglia di aggregati u, due qualsiasi dei quali abbiano sempre comune una parte contenente un aggregato u. Diciamo che la famiglia ha per limite a, se in ogni intorno di a esiste qualche aggregato u di tale famiglia.

Per vedere la estrema generalità di tale definizione io darò qui soltanto due esempi:

1°) Data una successione di numeri $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ si consideri come aggregato u ogni aggregato $\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \ldots$ (per n intero positivo arbitrario). La precedente definiz. equivale alla

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = a$$

secondo la definiz. abituale.

Digitized by Google

2°) Detto u ogni aggregato formato con le somme $\Sigma f_i \delta_i$, che compaiono nella definiz. di integrale definito, in cui il massimo dei δ_i non superi un certo numero δ e la famiglia degli u si ottenga facendo variare il numero δ, il limite di tale famiglia esiste, quando esiste l'integrale della f, e coincide con questo integrale.

L'A. parla poi dei limiti di oscillazione (che coincidono quando il limite esiste), delle funzioni semicontinue, del teorema di esistenza del massimo o minimo per tali funzioni, delle funzioni continue.

Si definisce un *intorno* di una funzione $f(x) = f^{(0)}(x)$ come l'aggregato delle funzioni $\eta(x)$ per cui

$$| f^{(i)}(x) - \eta^{(i)}(x) | \leq \varepsilon^i \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Il valore di n dicesi l'*ordine* dell'intorno.

Con le definizioni del libro, assunti come intorni quelli di ordine zero, la $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ equivale all'ordinaria *tendenza uniforme* al limite.

La lunghezza di una linea $y = f(x)$ è funzione continua della funzione $f(x)$, se si assumono come intorni quelli di ordine 1, ed è soltanto semicontinua inferiormente se si assumono come intorni quelli di ordine zero.

Assunti come intorni quelli di zero, si prova che gli aggregati E di funz. ugualmente continue sono compatti (che cioè ogni aggregato parziale di E contenente infinite funzioni possiede almeno una funzione limite); e la dimostrazione evita il postulato di Zermelo.

Si studiano quindi le curve in rappresentazione parametrica, le curve rettificabili, gli aggregati di tali curve.

Si passa infine agli spazii a un'infinità numerabile di dimensioni, un punto dei quali è definito da un'infinità numerabile di coordinate $x_1, x_2, x_3, \ldots$, distinguendo dal caso generale lo spazio di Hilbert-Schmidt, in cui le x si suppongono sempre tali che Σx_n^2 converga. Poche e suggestive pagine sono dedicate alle varie possibili definizioni di intorno e all'esame del come nei varii casi si possano estendere le proposizioni relative ai limiti, agli aggregati chiusi, ecc.

Segue un lungo capitolo dedicato agli integrali del Lebesgue; io non ne farò neanche cenno. Con la maestria abituale dell'au-

Digitized by Google

tore sono esposte nel modo più completo e preciso le proprietà fondamentali e le applicazioni (al calcolo delle funzioni primitive e alle curve rettificabili) di tali integrali. A tali questioni è dedicato anche il § 5.

Il successivo capitolo è dedicato alle serie di Fourier; ma il metodo di trattazione è così elegante e suggestivo che non possiamo fare a meno di riassumerlo un po' particolareggiatamente.

Dato lo sviluppo formale di una funzione in serie di Fourier, si enuncia che non ogni serie trigonometrica definisce una funzione integrabile (come si dimostra più avanti, la funzione

$$f(x) = \Sigma \frac{\operatorname{sen} n x}{\log x}$$

non è integrabile) e si enuncia pure che una serie trigonometrica definente una funzione $f(x)$ integrabile coincide con la serie di Fourier della $f(x)$. Posto ciò, si pongono le seguenti domande:

1°) I coefficienti a_n, b_n della serie di Fourier per $\varphi(x)$, cioè le costanti a_n, b_n di Fourier della $\varphi(x)$, bastano ad individuare $\varphi(x)$? (naturalmente per $0 \leqq x \leqq 2\pi$).

2°) Se così è, come si può dalle a_n, b_n risalire alla $\varphi(x)$?

3°) Come si riconoscono le successioni a_n, b_n di costanti di Fourier di una funzione integrabile?

Quanto alla prima domanda si osserva dapprima che le a_n, b_n potranno determinare $\varphi(x)$ soltanto a meno di una funzione additiva quasi sempre nulla (cioè differente da zero soltanto in un aggregato di misura nulla). E ciò, perchè gli aggregati di punti di misura nulla non hanno importanza nel calcolo degli integrali.

Prima di rispondere alle domande citate, si svolgono alcune necessarie considerazioni preliminari:

α) sui metodi di sommazione di Cesàro-Borel, ecc. per le serie,

β) sui teoremi di Fèjer per le serie di Fourier,

γ) sulla rappresentazione delle funzioni continue mediante serie uniformemente convergenti di polinomi algebrici o trigonometrici.

Si dimostra poi che, note le costanti di Fourier della $\varphi(x)$, sono note quelle di

$$\int_0^x \varphi(x)\, dx;$$

Digitized by Google

il quale integrale si può determinare perciò col metodo di Fèjer (o anche con la somma ordinaria della corrispondente serie di Fourier); quindi

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \varphi(x)\, dx ,$$

uguaglianza *quasi sempre* vera e determinata *quasi dappertutto*.

La prima domanda ha ricevuto così una risposta affermativa affatto esauriente; mentre nello stesso tempo è dato un metodo per risolvere la questione posta dalla seconda domanda.

Si dà infine qualche condizione *necessaria* (non sufficiente) a cui deve soddisfare ogni successione, che sia una successione di Fourier.

Ma alla terza domanda si risponde pure in modo esauriente col teorema di Riesz-Fischer, quando ci si limiti alle funzioni integrabili col loro quadrato, e alla corrispondente successione di costanti di Fourier.

L'aggregato di tali funzioni è così ben rappresentato coi punti dello spazio di Hilbert-Schmidt.

Tra i lemmi usati in questo studio ricorderò il seguente notevolissimo (di Weyl e Plancherel).

Se $f_n(x)$ *è per* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *una successione di funzioni tale che esistano gli*

$$\int_a^b |f_p(x) - f_q(x)|^r\, dx$$

e tendano a zero per $p, q = \infty$, *allora esiste una funzione* $f(x)$, *tale* α) *che la quantità*

$$\int_a^b |f(x) - f_p(x)|^r\, dx$$

tenda a zero per $p = \infty$, *e che* β) *nella successione data si possa trovare una successione subordinata* $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3} \ldots$ *in guisa che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aggregato* B *di misura minore di* ε *in guisa che nei punti di* (a, b) *esterni a* B *le* f_n *tendano per* $m = \infty$ *uniformemente ad* $f(x)$. La $f(x)$ così defi-

Digitized by Google

nita è unica. Anzi, se

$$\int_a^b | f_p(x) |^\varrho d x$$

esiste ed è minore di una costante M, [oppure se

$$\int_a^b | f_p(x) |^\varrho d x$$

esiste], qualunque sia $\varrho \leq r$ *allora anche*

$$\int_a^b | f_p(x) |^r d x$$

esiste ed è minore di M.

Questo teorema appare come una generalizzazione del classico teorema di Canchy per l'esistenza del limite, quando si chiami intorno (di grado r) di una funzione $f(x)$ dell'intervallo (a, b) la classe delle funzioni $F(x)$ tali che

$$\int_a^b | f(x) - F(x) |^r d x \leq \varepsilon.$$

Il § 6 si chiude con rapidi cenni sulle funzioni di più variabili, e sulle generali successioni ortogonali.

Il § 7 parla dei funzionali $y = F\left[\begin{matrix} f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x) \\ c_1 \quad c_2 \ldots, c_n \end{matrix}\right]$, dove con questo simbolo si indica un funzionale che dipende dai valori assunti da $f_i(x)$ nell'aggregato c_i per $i = 1, 2, \ldots n$.

Tra questi notevoli i polinomiali, somme di un numero finito di monomiali, cioè di termini del tipo

$$F\left[\underset{a \ldots b}{f(x)}; \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m\right]$$

$$\int d x_1 \ldots \int_a^b d x_n K(x_1, x_2; \ldots x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) f(x_1) \ldots f(x_n),$$

che dipendono inoltre da più variabili ξ.

Si considera qual'è il campo di variabilità della f, secondo che i noccioli e K sono limitati e integrabili oppure integrabili

Digitized by Google

col loro quadrato. In questo secondo caso si vede che lo studio dei monomiali equivale a quello di forme in infinite variabili: le coordinate di un punto nello spazio di Hilbert-Schmidt. Il detto monomiale sarà *continuo*, se nel primo caso come definizione di tendenza al limite per la $f(x)$ si assume quella secondo le medie di grado $r = 1$

$$\left[\text{dicendo } \lim \varphi(x) = f(x) \text{ se } \lim \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^r \, dx = 0 \text{ per } r = 1\right],$$

nel secondo caso quella secondo le medie di grado $r = 2$.

Per i funzionali F definiti in un aggregato $\mathcal{F}$ di funzioni $f(x)$ continue in (a, b), i quali sieno continui quando come definizione di tendenza al limite per la $f(x)$ si assuma quella di convergenza uniforme in (a, b), si dimostra che: *Se le funzioni* $f(x)$ *di* $\mathcal{F}$ *sono equilimitate, ogni tale funzionale* F *è limite di polinomiali*. Questo teor. è nel calcolo funzionale l'analogo del teorema di Weierstrass per le funzioni continue.

Infine si studiano gli integrali classici del calcolo delle variazioni considerandoli come funzionali F dipendenti da una funzione $f(x)$ o da una curva variabile indipendente. Con esempi si vede qual'è il campo in cui nei casi più notevoli si potrà pensare variabile tale funzione $f(x)$ o tale curva, affinchè F sia determinato, e si danno alcuni teoremi sulla continuità di tali funzionali. Citerò uno solo di tali teoremi. *Se*

$$F\left[\underset{a\ldots b}{f(x)}\right] = \int_a^b g\left[x, f(x), f'(x)\right] dx ,$$

se

$$|g(x, y, y')| < M h(y') + M_1 ,$$

dove M, M_1 *sono costanti,* $h(y')$ *è funzione essenzialmente positiva e continua, se*

$$\lim y_n^{(x)} = \eta(x) \quad , \quad \lim y'_n(x) = \eta'_n(x) ,$$

se y'_n, η'_n *sono finite eccetto al più un aggregato* Δ *di misura nulla*, allora $\lim_{n=0} F\left[\underset{a\ldots b}{y_n(x)}\right] = F\left[\underset{a\ldots b}{\eta(x)}\right]$.

Sia $F\left[\underset{a\ldots b}{f(x)}\right]$ un funzionale. Posto $f(x) = g(x, \varepsilon)$, dove

Digitized by Google

$g(x)$ dipende anche da un parametro ε, allora $F[f(x)]$ diventerà una funzione $\Phi(\varepsilon)$ di ε. *Se* d $\Phi(\varepsilon)$ *per* $\varepsilon = 0$ *esiste e dipende* (al modo generale dei funzionali) *soltanto da* $\eta(x) = g(x, 0)$ *e dal differenziale* $\omega(x)\,\varepsilon$ dove $\omega(x) = \left(\frac{\partial g(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$, l'Autore chiama $d\,\Phi$ *la variazione di* $F\left[\underset{a\ldots b}{f(x)}\right]$ *per* $f(x) = g(x, 0)$ *corrispondente alla variazione* $\omega(x)\,\varepsilon$ *di tale variabile indipendente* f(x).

Richiamo l'attenzione del lettore su questa profonda e generale definizione di variazione, che è la generalizzazione della ordinaria definizione di differenziale delle funzioni di più variabili indipendenti.

Si dimostra che la variazione è in casi molto generali un funzionale lineare (distributivo) in $\omega(x)$; dato un teorema generale sulla rappresentabilità dei funzionali lineari in $\omega(x)$ mediante limiti di funzionali del tipo

$$\int K(x)\,\omega(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int \sum_{i=0}^{m} K_i(x)\,\omega^{(i)}(x)\,dx\,,$$

si ritorna alle *variazioni*, mostrandone i legami con le *derivate* definite secondo Volterra.

Nella seconda parte il Levi tratta del calcolo delle variazioni; per non allungar tròppo questa recensione, mi accontenterò di dire che vi si tratta della equaz. di Eulero, delle condizioni di trasversalità, delle condizioni di Weierstrass, di Legendre (variando così l'ordine storico), di Jacobi con riguardo anche al caso degli estremi mobili. La teoria delle condizioni sufficienti per il minimo forte è svolta col metodo dovuto all'A. stesso; il teorema di Osgood chiude la trattazione.

L'ultimo paragrafo del libro tratta in generale dell'estremo assoluto e del relativo teorema di esistenza, esponendo in modo nuovo e generale quelle ricerche sul principio di minimo [relativamente ai problemi di calcolo delle variazioni, la cui equaz. di Eulero è un'equaz. differenziale alle derivate ordinarie], che hanno la loro origine nei lavori Hilbert.

Dopo che il corso del Levi era terminato, è uscito un bel lavoro del Tonelli (Rend. di Palermo, 1915), che ha intimi legami con le teorie qui svolte.

Digitized by Google

Il Levi tratta dell'integrale

$$F\left[\underset{x_1 \ldots x_2}{y\,(x)}\right] = \int_{x_1}^{x_2} f\,(x, y, y')\,dx$$

dove f è finita e continua con le sue derivate prime, seconde e terze p. es. nel campo ottenuto facendo variare il punto (x, y) in una certa regione R del suo piano, e lasciando y' arbitrario.

Egli dimostra in casi abbastanza generali che, se $\eta\,(x)$ soddisfa alle condizioni di Weierstrass e Legendre per il minimo, se $\eta'\,(x)$ è quasi dappertutto limitata, che $F\,[y]$ è semicontinua inferiormente per $y = \eta\ x$). Questo, se si definiscono come intorni di $\eta\,(x)$ l'insieme delle funzioni $y\,(x)$ assolutamente continue per cui $F\,[y]$ ha senso, e che soddisfano a una disuguaglianza del tipo $|\,y\,(x) - \eta\,(x)\,| < \varepsilon$, dove ε è un numero positivo variabile con l'intorno considerato (intorno di *ordine* zero nell'aggregato delle funzioni assolutamente continue).

Il teorema si generalizza anche al caso che la $\eta\,(x)$ sia soltanto assolutamente continua, e che $F\,[\eta\,(x)]$ esista. Si devono però imporre alcune condizioni restrittive per la f. Ma ci è impossibile dare qui tutti i varii enunciati, che non sono tutti semplicissimi.

Nel caso regolare molte precedenti condizioni si semplificano, perchè p. es. le condiz. di Weierstrass e Legendre si sanno già soddisfatte; l'A. dimostra che anche lo altre condizioni si possono in tale caso ridurre, se si ammette di considerare soltanto funzioni y tali che $\int_{x_1}^{x_2} |\,y'\,|\,dx$ sia minore di una certa costante ed $f\,(x, y, y')$ abbia un limite inferiore finito.

L'A. ne deduce l'elegante teor. di Lindeberg il quale ci dice che, mentre le condizioni di Eulero, Legendre, Jacobi per la curva $y = \eta\,(x)$ assicurano il minimo rispetto alle funzioni $y\,(x)$ tali che $|\,y'\,(x) - \eta'\,(x)\,|$ sia ovunque piccolo, la condiz. di Weierstrass invece assicura il minimo rispetto alle funzioni $y\,(x)$, la cui derivata differisca da y' per un numero abbastanza grande in un aggregato abbastanza ampio di punti.

Dai teoremi sopra riassunti segue che $F\,[y]$ assume certo un valore *minimo* (in senso assoluto) in ogni aggregato di funzioni $y\,(x)$ assol. continue, il quale sia chiuso e compatto rispetto

Digitized by Google

agli intorni di ordine zero (*), quando sieno soddisfatte le ipotesi dei nostri teoremi.

E il libro si chiude con la ricerca se la funzione che rende $F(y)$ minimo è veramente un'estremale, cioè soddisfa all'equazione di Eulero. La trattazione del caso elementare del calcolo delle variazioni ha così un esauriente sviluppo.

GUIDO FUBINI.

Matematiche elementari.

Questioni riguardanti le matematiche elementari. raccolte e coordinate da F. ENRIQUES.

Vol. I — *Critica dei principii* (pag. 649 + VI). L. 20 — (1912).

Vol. II — *Problemi classici della geometria — Numeri primi ed analisi indeterminata — Massimi e minimi* (pag. 811 + VI). L. 30 — (1915) (Bologna, Zanichelli).

I volumi di queste questioni ripresentano allargandolo il disegno che l'Enriques si era proposto nelle ben note « Questioni riguardanti la geometria elementare ». Come dichiara l'Enriques l'opera ha per scopo « di elevare lo spirito filosofico dei nostri insegnanti di Matematiche, e di aprire ai loro occhi una visione più larga delle dottrine e del progresso storico della Scienza ». Possiamo dir subito che l'opera riescirà certamente allo scopo prefissole dall'A., e che di essa come dell'opera primitiva, sarà larga l'influenza nelle scuole.

Ciò premesso, esaminerò ora particolarmente gli articoli essenzialmente nuovi, che questa opera porta in più della precedente riguardante la Geometria elementare (cfr. *Bollettino*, T, III, 1900 pag. 77-85): gli altri son tutti, chi più chi meno ampliati, e modificati, ma chi conosce la prima opera se ne può fare facilmente un' idea.

G. VAILATI. *Sulla teoria delle proporzioni.*

La prima parte riguarda la teoria euclidea, che espone con critica esauriente, esaminandone le varianti presentata dei vari testi. La seconda parte espone le varie teorie delle proporzioni tra segmenti che sono state svolte in seguito, o istituendo un calcolo

(*) Cioè quando un intorno di una funzione y_0 è definito da una disuguaglianza $| y - y_0 | \leqq \varepsilon$.

Digitized by Google

dei segmenti, o prendendo per base di una nuova definizione la proprietà espressa dal teor. di Talete o quella espressa dall'equivalenza dei rettangoli degli estremi e dei medi di una proporzione tra segmenti. Particolarmente importante è l'esame della dipendenza nelle varie teorie dei teoremi tra loro, e specialmente dela loro dipendenza dal teorema di Pappo o da quello dei triangoli omotetici; notevole pure la parte storica. Il nome dell'A. mi dispensa dal dire più diffusamente; ed il mio giudizio si riassume in due parole: è ottima. Dopo la pubblicazione dell'articolo, che comparve nell'ediz. tedesca dell'opera precedente, è comparsa nei Math. Annalen (1909) una nuova memoria sull'argomento, del Kommerell, ma essa non porta nessun nuovo contributo, onde l'articolo in questione resta sempre completo.

F. Enriques, *I numeri reali.*

La prima parte si occupa dapprima di approfondire nella loro generazione e nel loro contenuto i concetti di numero ordinale e cardinale, poi passa a parlare delle classi infinite e delle proprietà che le distinguono dalle classi finite, della loro potenza, ed infine delle serie ben ordinate e del principio d'induzione completa. La prima parte finisce con un breve esame della teoria delle operazioni dal punto di vista dei numeri cardinali, o ordinali, ed in particolare del metodo di Peano.

La seconda parte si occupa dei numeri razionali. L'A. premette alcune acute ed importanti osservazioni sulle ragioni che determinano l'introduzione di nuovi numeri, sulla legittimità e possibilità di una teoria analitica, anche in rapporto alle sue interpretazioni; poi esamina dai vari punti di vista, dal sintetico come dall'analitico, i diversi modi d'introdurre i numeri negativi ed i fratti. Importanti sono le osservazioni sulla corrispondenza tra le serie dei numeri interi relativi e quelle quasi ben ordinate, e sulle classi in corrispondenza biunivoca ordinata con quella dei numeri razionali.

La terza parte studia i numeri reali in relazione ai varii modi con cui possono essere introdotti, e alla loro proprietà della continuità ed integrità; e finisce collo studio della potenza del continuo numerico e col teorema di Cantor per cui la potenza del continuo a più dimensioni è la stessa di quella del continuo ad una dimensione.

La quarta parte si occupa dei transfiniti di Cantor come nu-

Digitized by Google

meri non Archimedei, del corpo minimo di numeri non Archimedei, entro cui sieno possibili le operazioni elementari, di alcune possibili loro interpretazioni, ed infine del continuo numerico come serie ordinata e della possibilitá di continui di specie superiore al numerico.

L'Articolo è certo degno dell'A., e contiene materia in grande quantità, esposta con ordine e chiarezza, e vivificata da numerose osservazioni di carattere filosofico, di cui bisogna riconoscere l'acutezza e l'importanza, anche se non sempre si può essere d'accordo con l'A. su esse.

Alcuni pochi nèi che qui segnalerò non diminuiscono il valore e l'interesse dell'Articolo.

I numeri relativí positivi sono considerati come identici ai numeri assoluti: la memoria del Cipolla sul Periodico di Matem. è troppo nota, perchè io debba dire le ragioni per le quali ciò non è giusto. Del resto nell'art. stesso si distingue $\frac{m}{1}$ da m.

Nel trattare dei numeri reali è lasciato completamente il metodo di Peano, cioè è lasciata la considerazione dei numeri reali quali limiti superiori; nella stessa parte quanto vien detto sul calcolo approssimato dei numeri decimali è insufficiente ed incompleto: è vero che si tratta di un argomento che per i nostri programmi ha ingiustificatamente un'importanza secondaria, ma a mio avviso ne meriterebbe una molto maggiore, analoga a quella che gli si dà nei programmi francesi.

In tutti i casi non sembra all'A. che dal punto di vista sintetico, e da quello del numero cardinale la giustificazione più chiara e convincente della definizione di prodotto stia nel teorema del cambiamento dell'unità di misura, di cui nell'art. non si parla mai, anzichè nelle conbinazioni?

Infine la dimostrazione del teorema di Cantor è ridotta così scheletrica in poche righe, che tralascia parti essenziali della dimostrazione stessa: in tal modo lascia insoddisfatto chi, abituato alle sottigliezze dei ragionamenti che si devon fare in quel campo, si accorge delle manchevolezze, e trae in inganno l'inesperto, che non se ne accorgesse.

Come si vede son nèi, ma i lettori non possono credere, che si trovi da criticare di più in un articolo dell'Enriques.

D. Gigli, *Dei numeri complessi a due o a più unità.*

Digitized by Google

La prima parte è uno studio dal punto di vista storico del modo come sorse e vi sviluppò la teoria dei numeri complessi: la larga conoscenza della materia ha portato ad ed osservazioni critiche importanti. La seconda parte contiene prima la teoria geometrica (basata sui vettori) e poi quella analitica dei corpi associativi Hankeliani a due unità La terza parte contiene alcune delle più semplici dimostrazioni del teorema fondamentale dell'algebra. La quarta parte, premesse le prime nozioni sul concetto di funzione di variabile complessa e sulle rappresentazioni conformi, estende con semplicità di mezzi e somma chiarezza il concetto di potenza al caso di base ed esponente complesso: ciò, senza ricorrere alle serie, ma basandosi sulla proprietà espressa dall'equazione funzionale

$$f(x_1) f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

L'ultima parte estende ai numeri complessi ad n unità le considerazioni fatte per quelli a 2 unità, arrivando a dimostrare infine che l'unico corpo hankeliano ed associativo a più di 2 unità è quello dei quaternioni. Importante l'interpretazione geometrica dei corpi di numeri complessi in relazione ai gruppi di omografie di un s_n. L'articolo si distingue per la chiarezza dell'esposizione, e la competenza con cui l'argomento è trattato. Sole osservazioni che ho saputo trovare, le due seguenti: La definizione di vettore non è rigorosa: il vettore è il concetto astratto della classe dei segmenti paralleli, di ugual grandezza e ugual verso. Manca qualunque accenno alla teoria puramente analitica che considera il numero complesso come una sostituzione lineare (Peano): dati gli sviluppi del testo bastava accennarvi con poche parole.

F. Enriques *Osservazioni sui problemi geometrici.*

È un articolo che serve di conclusione e di complemento agli articoli precedenti sulla risoluzione dei problemi geometrici, che già figuravano nell'opera precedente. Contiene alcune osservazioni generali sulla classificazione dei problemi geometrici sotto l'aspetto del numero delle soluzioni, della semplicità, dell'esattezza delle costruzioni, anche in relazione agli strumenti di cui si dispone. Chiude con considerazioni su metodi di risoluzione e sulla loro evoluzione col progresso scientifico.

È un'articolo che si legge piacevolmente, che contiene vedute generali di notevole importanza, e che serve bene al compito

Digitized by Google

di riassumere in una veduta d'insieme gli articoli precedenti; se mai, in qualche punto si desidererebbe che l'A. desse qualche esempio e qualche particolare di più.

U. Scarpis, *Sui numeri primi e sull'analisi indeterminata.*

La prima parte, dopo aver trattato delle proprietà più semplici dei numeri primi, dà gli elementi della teoria degli integrali numerici e dell'inversione ed i più importanti teoremi sul numero dei numeri primi compresi tra due numeri. La seconda parte tratta della risoluzione dell'equazione Diofantea e degli elementi della teoria delle congruenze rispetto ad un modulo primo. Eleganti le applicazioni alle dimostrazioni dei teoremi che ogni numero è somma di quattro quadrati e che l'equazione $x^4 + y^4 = z^2$ non ha soluzioni intere.

L'esposizione ha in comune con quelle degli articoli precedenti il pregio della chiarezza e dell'ordine; la materia è posseduta largamente dall'A. Tuttavia mi è riuscita inesplicabile la mancanza della dimostrazione del teorema di Stirling, e quella della trattazione delle equazioni o dei sistemi lineari in determinati con più di due variabili. Inoltre il riassunto che l'A. fa delle memorie di Riemann e di Levi-Civita sul numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo mi pare che possa servire solo ad invogliare a leggere quelle memorie, ma non a dare una idea di esse; per ciò quei riassunti mi sembrano in gran parte inutili.

A. Padoa, *Sui massimi e minimi delle funzioni algebriche elementari.*

La prima parte dà i soliti teoremi elementari sui massimi o minimi (assoluti) delle funzioni ad una o più variabili, e precisamente il teorema sul massimo di

$$x_1 x_2 \ldots x_n \text{ per } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{cost.}$$

e le conseguenze. La seconda parte tratta col metodo della funzione inversa i massimi e minimi della funzione $y = \frac{a x^2 + b x + c}{p x^2 + q x + r}$. Nella terza parte l'A. trova sempre elementarmente i massimi ed i minimi di alcune funzioni implicite. La prima parte non si può che lodare: un ordine grandissimo, molta chiarezza e semplicità di mezzi, ne sono per me i meriti principali; le note critiche ed il teorema di reciprocità meritano speciale attenzione. Però alcuni appunti: La discussione della funzione $y = ax^2 + bx + c$, che

Digitized by Google

si perde tra i numerosi casi consimili della 2ª parte, per la semplicità dei mezzi che richiede e per le numerose applicazioni cui si presta, avrebbe dovuto sostituire il metodo indicato per trovare il massimo od il minimo del prodotto di due fattori lineari che è meno semplice e più ristretto. Il metodo dei coefficienti indeterminati vien trascurato troppo, l'A. limitandosi a dare semplicemente un esempio della sua applicazione, quello del problema della scatola: dal punto di vista elementare questo metodo meritava di avere una trattazione più diffusa, e di essere applicato al caso di prodotti di potenze di fattori lineari. La minuziosa discussione della 2ª parte poteva essere notevolmente accorciata limitandosi a dare solo alcuni dei casi possibili. Quanto all'ultima parte l'A. dichiara che essa « viene considerata come il soddisfacimento complementare di curiosità teoriche »: ma francamente il metodo propostovi è troppo complicato per essere di carattere elementare, ed inoltre è molto più difficile e ristretto di quello delle derivate per essere accettato dal punto di vista superiore.

O. Chisini, *Sulla teoria elementare degli isoperimetri.*

Espone la teoria nei varii assetti in cui essa è stata posta, aggiungendo spesso note critiche specialmente in relazione al postulato dell'esistenza del minimo. Poi espone una sua teoria elementare degli isoperimetri indipendente dal detto postulato, rigorosa ed abbastanza semplice. L'isoperimetria solida è svolta in base alla memoria di Steiner: poi viene un cenno sul metodo adoprato dal Tonelli per dimostrare la proprietà di massimo della sfera indipendentemente dal postulato di esistenza, ed un altro cenno sul teorema di Lindelöf, cioè sul teorema che ha i poliedri della stessa specie di ugual superficie totale il massimo è quello circoscritto ad una sfera, che tocchi le faccie ciascuna nel suo baricentro.

Lo svolgimento è chiaro, completo per la parte storica e per quanto riguarda l'isoperimetria piana: buone le note critiche e la parte originale. Nell'isoperimetria solida ci sono parecchi punti su cui l'A. ha sorvolato perchè di carattere intuitivo, sebbene di non facile dimostrazione. Nelle osservazioni sulla convessità delle curve che presentano il massimo, l'A. si occupa di curve formate da segmenti ed archi di circonferenza, ma in altre parti parla solo di curve o di superficie senza dir nulla sulle restrizioni, in parte evidenti, che occorre imporre loro. Il sunto

Digitized by Google

della dimostrazione di Lindelöf è incompleto, e lascia troppi dubbi. Errori di stampa, non pochi, rendono talvolta faticosa la lettura: alcune notazioni son poco felici.

F. ENRIQUES, *I massimi o minimi nell'analisi moderna.*

Nella prima parte l'A. dà in un primo capitolo i principali teoremi sull'esistenza dei massimi o minimi di funzioni di una o più variabili definite in un intervallo, o in un gruppo chiuso di punti, o vincolate, applicando i risultati ai problemi elementari. Nel 2° capitolo dà l'analisi infinitesimale dei massimi e minimi delle funzioni esplicite o implicite di una variabile, e per quelle esplicite di 2 variabili. Per le funzioni a più variabili l'A. dà la condizione necessaria perchè un punto sia di massimo o minimo, applicandola poi alla ricerca del massimo e del minimo assoluto di una funzione anche vincolata. Poi nello stesso argomento l'A. espone il teorema di reciprocità ed il principio di simmetria. Nela 2ª parte studia le funzioni di linee (linee limiti, continuità, semicontinuità) e su di esse dà i teoremi di Ascoli, di Arzelà e di Hilbert sull'esistenza di linee limite in un insieme; poi il teorema di Weierstrass sull'approssimazione d'una funzione continua per mezzo di un polinomio. Nell'ultimo capitolo studia molto ampiamente coi metodi del calcolo delle variazioni il problema delle geodetiche e quello degli isoperimetri, traendone occasione per dare contemporaneamente i teoremi principali del calcolo delle variazioni. Importanti specialmente le osservazioni sulla necessità di dimostrare che gli estremali dànno effettivamente massimi o minimi nei varii casi studiati: è notevole anche la dimostrazione nuova di questa proprietà. Il nome dell'A. mi dispensa dal dare un giudizio facilmente immaginabile; solo però due osservazioni. Le dimostrazioni dei teoremi che ogni funzione continua in un intervallo finito è limitata ed ha un massimo ed un minimo potevano essere fatte con maggior semplicità in modo analogo a quella del teor. che tra a e b una funzione continua $f(x)$ prende ogni valore tra $f(a)$ ed $f(b)$. Più semplice molto riescirebbe la definizione di lunghezza e di area limitata di una linea se fossero date come limiti superiori.

Ho già detto in principio il mio modesto parere sull'opera complessiva e via via ho detto anche quello sui singoli articoli ora aggiunti. La materia di questi, come si vede dall'esposizione fattane sopra, è gia molto ampia: se vi si aggiunge tutta l'altra

Digitized by Google

contenuta negli articoli già pubblicati nell'opera primitiva si vede che comprende quasi tutta la matematica elementare. Sulle principali questioni di essa quest'opera dà già ordinato e sottoposto a diligente critica un campo discretamente ampio di nozioni e di osservazioni che altrimenti richiederebbero lunghe e non facili ricerche in molti libri, ed un lavoro di critica non facile e non breve: inoltre le varie teorie son considerate sempre da un punto di vista superiore, che contribuirà, io credo, largamente ad elevare la cultura matematica nel nostro paese.

Solo accanto a questo scopo, pure nobilissimo, avrei voluto che gli A. si fossero proposti anche un altro scopo pur molto importante: che essi cioè avessero affrontato le varie questioni di metodo e di limiti, che si presentano continuamente agli insegnanti. Gli autori avrebbero potuto far molto bene in questo campo. Invece le osservazioni di questo carattere che negli articoli dell'opera primitiva si presentavano abbastanza spesso, si riducono a poche parole soltanto in alcuni degli articoli nuovi. E su un altro argomento avrei volentieri sentita la parola dell'Enriques specialmente; cioè su tutte le questioni che riguardano l'introduzione degli elementi del calcolo infinitesimale e della rappresentazione delle funzioni nelle scuole medie. Le relazioni e le discussioni fattane finora sono un po' vaghe e richiederebbero un esame più concreto delle varie questioni connesse, e nessuno meglio dell'Enriques avrebbe potuto darcelo. Capisco che la mole dell'opera non è piccola, ma l'amore che l'Enriques ha sempre portato alla scuola media italiana non potrebbe spingerlo alla fatica di un 5° volume?

SIRO MEDICI.

Pubblicazioni recenti nella Storia delle Matematiche.

A. FAVARO, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXXIII. Mattia Bernegger. Atti del R. Ist. Veneto, T. LXXV, Parte II, 1915-16.

M. Bernegger — n. a Hallstat (Austria) l' 8 febbr. 1582, m. a Strassburgo il 5 febbr. 1640 — merita un posto cospicuo nella storia della varia fortuna delle idee galileiane per avere tradotti dall'italiano in latino e pubblicati con commenti l'opuscolo sul

Digitized by Google

Compasso di proporzione ed il *Dialogo sopra i massimi sistemi*; onde a ragione il Favaro vi consacra il presente elemento di una raccolta ormai celebre, il quale per numero ed esattezza di dati non è inferiore ai precedenti.

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXXIV-XXXVI. Bonaventura, Abramo e Lodovico Elzevier. Ivi.

I celebri editori olandesi prendono posto nella presente collezione per avere pubblicato alcuni lavori di Galileo ed avere progettata, ma poi non eseguita, un'edizione completa delle sue opere.

A. Favaro, *Nuovi materiali per una iconografia Galileiana.* Ivi. Terza comunicazione sull'indicato argomento.

A. Favaro, *Pietro d'Abano ed il suo « Lucidator Astrologiae ».* Ivi.

Informazioni sopra un'opera inedita del celebre astrologo padovano, in base alle notizie date da P. Duhem nel T. IV della sua *Histoire du système du monde.* Riguardo ad essa il Favaro formola il voto (al quale di gran cuore ci associamo), che « superata la gravissima crisi storica che stiamo attraversando, un qualche studioso si senta attratto dal desiderio di istituire ricerche che valgano a metterne » [cioè del « Lucidator »] « in luce un esemplare completo e meglio conservato » [di quello parigino studiato dal Duhem] « e trovato questo, faccia conoscere l'opera in tutta la sua integrità ».

A. Favaro, *Sulla veridicità del « Racconto istorico della Vita di Galileo », dettato da Vincenzo Viviani.* Archivio Storico Italiano, 1915.

Contrariamente all'opinione di E. Wohlwill, l'a. sostiene che quella « Vita » è un documento meritevole di fede; incidentalmente chiarisce altri problemi storici relativi a Galileo e confuta, almeno in parte, la tesi antigalileiana enuncitaa da P. Duhem nel III dei suoi noti volumi sopra Leonardo da Vinci.

A. Pascal, *Giovanni Ceva ed il suo carteggio inedito con Vincenzo Viviani.* Annali di Matematica, III Ser., T. XXIV.

Sono undici interessanti lettere scambiatesi tra quei due eminenti geometri fra l'ottobre 1685 ed il marzo 1701, i cui originali

Digitized by Google

sono conservati a Firenze nella celebre collezione dei *Discepoli di Galileo.*

CH. TWEEDIE, *A Study of the Life and Writings of Colin Maclaurin.* The mathematical Gazette, ottobre 1915.

In circa venti pagine è compendiata la vita del celebre matematico inglese ed è data una completa analisi delle sue opere; alcune di queste essendo estremamente rare sul continente, quanto scrive l'a. servirà a rettificare e completare le notizie fornite da storici che quelle opere non poterono esaminare.

F. CAJORI, *The Works of William Oughtred.* The Monist T. XXV, 1915, p. 441-466.

Articolo estratto dal più esteso lavoro dello stesso autore *The Life of Oughtred* (The Open Court, agosto 1915) e dedicato all'analisi di tutti i lavori del celebre matematico inglese: *Clavis mathematicae, Circles of proportions. Trigonometry.* Risoluzione delle equazioni numeriche, Regola calcolatorio, Opere minori.

F. CAJORI, *Oughtred's Idea and Influence on the Teaching of Mathematics.* Ivi p. 495-530.

Benchè l'Oughtred non sia stato insegnante nè abbia scritto alcuna esposizione metodica delle proprie idee didattiche, pure esercitò tale influenza che l'a. lo chiama il « Todhunter del secolo XVII. » Vanno anche notate le osservazioni dell'a. intorno alle eventuali influenze del matematico inglese sopra Descartes e le notizie intorno al diffondersi delle nuove notazioni algebriche da lui proposte ed usate.

A. LUZIO, *Una lettera auto-apologetica di Guglielmo Libri.* Miscellanea di studi storici in onore di G. Sforza, Lucca 1915.

Fu destino di G. Libri di venir sempre sospettato, a torto od a ragione. La presente pubblicazione dà notizia dell'accusa di traditore che fu diretta contro di lui, quando nel 1831 partecipò ad una congiura ordita a Firenze per sbalzare dal trono il granduca di Toscana (1); tale accusa viene respinta dal famigerato storico con una lettera diretta allo Scalvini il 17 aprile 1831 e che il Luzio dà per la prima volta alla luce.

(1) Cfr. ad es. A. Reumont, *Gino Capponi e il suo secolo,* Vol. I (Milano, 1881) p. 171.

Digitized by Google

G. Loria. *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici dell'Antichità* (Scientia, Vol. XVIII, 1915). *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici moderni anteriori al Secolo XVIII* (Ivi, T. XIX, 1916).

G. Loria, *The Physicist J. B. Porta as a geometer* (Bull. of the Amer. mathem. Soc., Vol. XXII, 1916).

G. Loria. *Il « Philosopical Magazine » e la storia delle matematiche* (Rivista di storia critica delle scienze mediche e naturali, Anno VII, 1916).

G. Loria, *Note sulla storia della matematica in Italia.* I. *Pier della Francesca e Luca Pacioli.* II. *T. Ceva e G. Grandi nella preistoria della Geom. descrittiva* (Rend. della R. Acc. dei Lincei. 5 Marzo 1916).

E Bortolotti. *Materiali per la storia dell'Istituto Nazionale.* Mem. della R. Accademia di Modena, III Sec. Vol. XII. 1915.

Lo studio dei mss. di Paolo Ruffini fece conoscere all'autore molti documenti inediti e sconosciuti relativi all'Istituto Nazionale, fondato dal primo Napoleone e scomparso quando cessò la dominazione francese in Italia; essi trovansi raccolti ed illustrati nella presente memoria, notevole contributo alla storia della vita scientifica italiana durante il periodo napoleonico.

G. Vacca, *Giovanni Nepero e l'opera sua (nel terzo centenario dell'invenzione dei logaritmi).* Rendiconti della Seduta del Seminario matematico della Fac. di Scienze della R. Università di Roma, 1914-15.

L'a. rettifica parecchie notizie errate che si trovano nella generalità degli storici intorno alle scoperte dei logaritmi ed alla struttura dei bastoncini neperiani.

G. Vacca, *Note cinesi.* Rivista di studi Orientali, T. VI, 1913.

La III di queste note ha per titolo « Un problema del matematico I. Hang » ed ha per scopo di far conoscere un lavoro analogo all'*Arenario* di Archimede e dimostrare la penetrazione in Cina del « sistema delle ottadi » del grande Siracusano.

PAVIA - PREM. TIP. SUCC. FRAT. FUSI

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 81-83.
Geometria analitica (Edgardo Ciani) pag. 84-92.
Calcolo delle Variazioni (Guido Fubini) pag. 93-102.
Matematiche elementari (Siro Medici) pag. 102-109.
Pubblicazioni recenti nella Storia delle Matematiche pag. 109-112.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques publiées par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrès du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
SALPETER. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

GUIDA ALLO STUDIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

DEL

Prof. GINO LORIA

Prezzo del volume elegantemente rilegato L. 3.

MILANO
ULRICO HOEPLI
—
1916

Digitized by Google

329

11.394

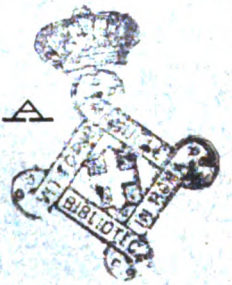
N. 4 PERIODICO TRIMESTRALE 1916

CONTO CORRENTE COLLA POSTA

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA



ANNO XVIII
1916

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1916

Pubblicato il 1 Novembre 1916.

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVIII, Fasc. IV: **Ottobre, Novembre, Dicembre** 1916

La correspondance entre Ludwig Schäfli et des Mathématiciens Italiens de son époque

par le

Dr. J. H. GRAF, *Professeur à l' Université de Berne*

(Cont. v. pag. 81)

N.° 42.

Pavia, 26 dicembre 1885.

Mio ottimo Amico

I due volumi sono arrivati in buonissimo stato, non si è pagato che una lira e pochi centesimi alla consegna in casa.

Maggi è stato nominato prof. all' Università di Modena; perciò è colà da un mese insieme con Eugenia. Scrissi, annunziando loro il vostro bellissimo e prezioso dono, che spedirò o porterò io stesso, andando a Modena in gennajo. Chi sa quanta gioja sentiranno nel vedersi così splendidamente ricordati da una persona, che essi al pari di me stimano altissimamente ed amano con vera tenerezza!

Terminate le cose universitarie, mi portai nello scorso luglio con Bianca a Piora sopra Airolo, donde avrei forse potuto procurarmi il piacere di rivedervi, se la malattia e la morte di mio fratello non avesse piombato tutti noi nella più profonda costernazione. Aveva soltanto 51 anni, era nel forte dell' intelligenza e dell' attività; era il solo superstite della mia famiglia paterna; i suoi studi, la sua posizione in Roma, la sua bontà ne facevano il conforto e l' onore precipui della nostra casa!

Digitized by Google

Beltrami ricambia i saluti, e mi dice che non mancherà di rispondervi. L'avrebbe già fatto, se talune contraddizioni sorte nel discorrere dell'argomento con Battaglini non lo avessero obbligato a qualche ricerca, che finora non ha compiuto.

Insieme con questa lettera vi dirigo una copia di un'articolo che vorrei potesse ottenere la vostra approvazione.

Aggradite, amico carissimo, i ringraziamenti che infanto vi facciamo io e Bianca, non che i voti che pure facciamo con tutta l'anima per la prosperità.

Il vostro devotissimo

F. Casorati

N.° 43.

Airolo, 7 settembre 1887.

Domani andrò a Porto Valtravaglia sul lago Maggiore per rimanervi almeno sino alla metà di ottobre colle mie figlie e mio genero. Saremmo tutti assai felici di poter quivi avere la vostra compagnia. Vorrete voi essere tanto buono da regalarcela come avete fatto altre volte? Io spero di sì, e quindi spero di ricevere presto una riga che m'annunzi il vostro arrivo.

L'aff.mo vostro F. Casorati.

N.° 44.

Porto Valtravaglia, 16 settembre 1887.

Ottimo amico

Rispondo alla vostra cara lettera. Riccardo De Paolis è prof. nell'Università di Pisa. Eugenio Bertini è prof. nell'Università di Pavia, e presentemente qui colla famiglia e ci rimarrà sino alla metà, almeno di ottobre.

Digitized by Google

Placido Tardy stava l'anno scorso in Firenze, Piazza d'Azeglio, 19.

Mi duole profondamente di sentire che la vostra salute non sia così salda come anni fa. Però, quanto al viaggio per qui, potendosi qui venire da Berna in 10 ore e mezza di ferrovia, la salute forse non ne soffrirebbe. Ma, naturalmente, siete voi il giudice competente ; e mio dovere è di raccomandarvi la massima cura per una salute, che io con moltissimi altri da più di me, tengo per sommamente preziosa.

Nondimeno non posso trattenermi dall'esprimere la speranza che il vostro giudizio riesca favorevole alla venuta.

Secondo gli *odierni* orari, ecco una delle maniere di venire a Porto Valtravaglia.

Berna part. 6,05 antim.			
Lucerna	arr. 9.10 part. 9.20	pel Gottardo	Ore di Berna
Bellinzona	arr. 1.48 part. 2.00		
Luino	arr. 3.25 Visita delle valigie part. 4.30		Ore di Roma
Porto Valtr.	arr. 4.43		

In attesa del vostro avviso, vi rinnovo i rispettosi saluti di tutti i miei, e mi dico

il vostro devotissimo

F. Casorati.

N.° 45.

Pavia 3 dicembre 1887.

Ottimo amico

Mi è caro sperare che il cattivo tempo sia stato l'ostacolo principale a farci il regalo della vostra compagnia a Valtravaglia.

Però, quando potrete favorirmi una vostra cart. postale, ve ne sarò obbligatissimo, essendo sempre in gran desiderio di vostre notizie.

Digitized by Google

Intanto vi prego aggradire il 1° articolo d'un lavoro che sto pubblicando, del quale spero ottenere la vostra approvazione.

Eugenia, con Maggi e la bambina, è ritornata a Messina, dove probabilmente andrò anch'io con Bianca a passare il Natale.

Aggradite i rispettosi e cordiali saluti di Bianca e del vostro devot.mo.

F. Casorati.

N.° 46.

Pavia, 29 dicembre 1887.

Mio ottimo Amico

Ciò che mi dite della salute, nella vostra lettera del 12 corr., mi accuora assai. Però io penso che se non vi affaticherete, se vi nutrirete di cibi convenienti, se vi circonderete dei comodi necessarii alla vostra età, e sé avrete cura di distrarre la mente in passeggiate piacevoli e conversazioni, penso che riuscirete poco a poco a ridurre a meno le indisposizioni. Io mi auguro con tutta l'anima che ciò avvenga, e coltivo la speranza che, nella buona stagione dell'anno vegnente, potrete venire a rallegrare colla vostra venerata e desideratissima persona la mia famiglia, che farà di tutto per rendervi meno disagevole il soggiorno di Valtravaglia.

Permettetemi qualche riga su ciò che avete avuto la bontà di scrivermi circa il mio recente articolo.

« Ich kann Riemann's Beweis für die Behanptung *sarà di un solo pezzo* nicht entbehren » siamo d'accordo. Io non ho inteso dimostrare, ma soltanto ricordare questa proposizione.

In oltre colla parola *tutto* (della riga 2) ho inteso significare *un sistema di n strati*, non un *tutto connesso*. Se il lavoro non fosse già stampato, avrei però fatto qualche cambiamento, appunto per evitare quelle interpretazioni a cui accennate.

Non sono sicuro di aver ben capito il senso delle seguenti vostre righe.

« Was andere abgehalten hat, sich des Riemann'schen Hülfsmittels zu bedienen, ist wohl die schwierige Frage über die lineare Abhängigkeit der ungewöhnlichen Zusammenhangsarten von einander ».

Però, se il darmi qualche schiarimento su queste righe vi

Digitized by Google

è di peso non scrivetemi. Ciò che sopra tutto desidero è di avere, ogni qualche mese, una riga (una sola, che non vi disturbi) di vostre notizie.

Abbiamo dovuto differire l'andata a Messina da adesso alla 2ª metà di febbraio.

Insieme col rigraziamento per la memoria « Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über die Lamé schen Functionen „ (1) aggradite i rispettosi ed affettuosi saluti di Bianca e del vostro devotissimo

F. Casorati

N.° 47.

Pavia, 23 giugno 1888.

Ottimo Amico

Ho tardato così enormemente a rispondere alla vostra cara lettera del 25 aprile per un cumulo di circostanze straordinarie e anche per il desiderio di farvi sapere in qual sito io e le mie figlie, coi loro mariti, avremmo passati insieme i mesi d'autunno perocchè noi nutriamo sempre la speranza di avervi in nostra compagnia. Questo sito dovrebbe essere *Intra* sul lago Maggiore; ma ora è nato qualche dubbio; così che mi riservo di indicarvelo più tardi, non volendo tardare più oltre a scrivervi.

Relativamente allo *Zeichen der Dankbarkeit*, come voi troppo gentilmente dite, per le nozze di Bianca, io ed essa vi preghiamo di non darvene pensiero, in quanto che sì io che essa conosciamo già moltissimo la bontà e l'affezione che avete per noi ed abbiamo aggradito il dono ad Eugenia come fatto indistintamente a tutti tre.

Mi è caro sperare che coll'inverno sia anche scomparso od assai diminuito il reumatismo che vi molestava, così da rendervi più accetta quell'esistenza che tutti quelli che vi conoscono non possono a meno di desiderare prosperosa e lunga.

Circa il 20 luglio conto andare a Piora sopra Airolo con Bianca e suo marito, e rimanervi tre o quattro settimane. Con Eugenia staremo in settembre ed in ottobre; e sarebbe per allora che noi vagheggieremo la vostra compagnia.

(1) Mem. della R. Acc. dei Lincei, Ser. I, T. IV; cfr. *Collectanea math. in mem. D. Chelini.*

Digitized by Google

Vogliate aggradire il 2° degli articoli *sopra le coupures del sig. Hermite etc.*, che consegno con questa lettera alla posta, ed aggradite altresì coi rispettosi saluti di Bianca una rispettosa e cordialissima stretta di mano del

vostro devotissimo

F. Casorati.

Aveva espresso, è vero, il desiderio di avere vostre notizie ogni mese; ma era una *pura espressione del desiderio*, e non intendevo punto di addossare a voi questo peso, ben sapendo quanto sia necessario di non concorrere ad aumentare gli impegni che già avete.

Di nuovo

il vostro Casorati.

N.° 48.

Cannobio (Lago Maggiore) 30 settembre 1888.

Ottimo Amico

Da Piora ed Airolo scesi a questo villaggio, del quale sarei contentissimo se le intemperie di quest'anno eccezionale non impedissero troppo spesso le passeggiate sui monti. Sono qui con Eugenia, una sua bambina e suo marito G. A. Maggi, e con Bianca. Il marito di Bianca, E. Franchi Maggi, alterna il suo soggiorno fra qui e Pavia, dove tiene studio d'ingegnere.

Tutti parliamo, assai più spesso che non forse imaginiate, dell'affettuoso ed eminente amico che risiede in Berna, e ci auguriamo che un'annata propizia ce ne ridoni la presenza nelle vacanze scolastiche. Ebbimo qui, testè, per alcuni giorni il Cremona colla signora, che sposò, come saprete, qualche mese fa.

Fareste a tutti un gran regalo, se vorreste un qualche giorno scrivere una riga di vostre notizie su cartolina qui diretta.

Il vostro devot.mo

F. Casorati.

N.° 49.

Pavia, 31 maggio 1889.

Venerato Amico

La vostra lettera, dandomi notizie finali piuttosto buone della vostra salute, e mostrandomi che pigliate sempre vivo in-

Digitized by Google

teresse anche alle cose del vostro amico di Pavia, mi ha portato immenso piacere.

Alle osservazioni sulla curvatura avrei voluto rispondere subito; ma sono da tempo impegnato in un lavoro gravoso, di dovere, cioè, studiare e concretare i miei giudizii, come commissario linceo, sugli scritti presentati al concorso reale di matematica. La maggior fatica mi è cagionata dal Giulio Ascoli, il quale concorre:

1° con la Memoria pubblicata nal vol. XVIII delle Memorie lincee, dal titolo: *Le curva limite di una varietà data di curve*;

2° con un manoscritto, press'a poco equivalente alle dodici Note pubblicate dall'Ascoli stesso nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo dal luglio 1884 al giugno 1885, concernenti la integrazione della $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e la dimostrazione del §. 3 (*Bestimmung einer Function einer veränd. compl. Grösse durch Grenz — und Unstetigheitsbedingungen)* della *Theorie der Abelschen Functionen* di Riemann.

Finora non sono riuscito a rilevare in queste dodici Note alcun progresso *sostanziale* in confronto dei vari lavori di Schwarz, ai quali l'Ascoli si appoggia. Se mai voi aveste avuto occasione di guardare queste cose dell'Ascoli, mi fareste gran favore comunicandomi l'impressione che v'hanno fatto.

Ora vengo alle osservazioni che avete avuto la bontà di farmi sulla curvatura. Da esse, come già da parecchie fra le altre lettere giungetemi dopo la pubblicazione mia, rilevo che si crede volere io criticare le *Disquisitiones*, e voler sostituire la mia curvatura a quella di Gauss. Ma *non* sono questi i miei pensieri. Io, anzi, penso che la *mensura curvatura* di Gauss non perde niente della sua opportunità *dal punto di vista dichiarato* nell'art. 13 delle *Disquisitiones*, e da voi stesso richiamato colle parole: *Für Gauss handelte es sich darum, bei einem Gewebe etwas zu finden, das sich gleich bleibt, wie auch das Gewebe verbogen werde; u. s. w.* Perocchè *il punto di vista della mia Nota è diverso.* Nella introduzione alla medesima mi sono sforzato di far risaltare questa diversità anche dove dico che la soluzione data dal grande Geometra *non regge alla critica dal punto di vista di questa Nota.* Da questo punto di vista una superficie è considerata *in forma fissa, unica*, ossia, per usare le parole stesse dell'articolo 13 delle *Disq.*, una superfice è considerata *tamquam*

Digitized by Google

limes solidi, et *non tamquam solidum, cujus dimensio una pro evanescente habetur, flexile quidem, etc.* Dunque, dal mio punto di vista, *superficies plana atque superficies in planum explicatis* (sed non explicata) *non tamquem essentialiter identice spectantur.*

E perchè mai non si dovrebbe stabilire una misura di curvatura appropriata alle superficie, considerate come limiti dei solidi? Questa maniera di considerare le superficie non è forse la più comune?

Voi scrivete: *Im übrigen erkenne ich Ihr volles Recht an, eine für Ihre Zwecke passende neue Definition der Krümmung der Flächen zugeben.* Epperò io vi domando: il mio Zweck è forse uno particolare, che non interessa la matematica in generale? Il mio scopo è stato questo: di tradurre in formula matematica, colla minore arbitrarietà possibile, l'idea comune o volgare di curvatura, una idea che più o meno vagamente si forma in ogni uomo (matematico o no) vedendo le superficie dei corpi.

Voi scrivete inoltre: *dann werden Sie aber wohl auch für* $C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)$ *einen andern Namen wählen, damit nicht zwei verschiedene Begriffe gleich bezeichnet seien.* Ciò va fatto; ma posso lasciare agli altri di farlo. Permettetemi però di osservare che essendo C una traduzione più fedele dell'idea volgare, che non $\frac{1}{R_1 R_2}$, non mi sembrerebbe giusto di applicare il vocabolo *curvatura* a questa misura e non a quella. Nelle mie lezioni di quest'anno io chiamai la C *curvatura*, senz'altro, e la $\frac{1}{R_1 R_2}$ *curvatura Gaussiana.* Chi vuol fare altramente, potrebbe, per esempio dire: *curvatura volgare* e *curvatura Gaussiana.* Non parliamo già anche di due curvature per le linee gobbe, dicendo spesso: prima curvatura, seconda curvatura!

Terminerò ripetendo il mio pensiero, che la $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)$ non deve escludere la $\frac{1}{R_1 R_2}$; nè viceversa. Poichè la forma di una calotta infinitesima (intorno ad un punto regolare) dipende essenzialmente da *due* quantità indipendenti, per le quali d'ordinario si prendono $\frac{1}{R_1}$ ed $\frac{1}{R_2}$; così non si può evitare che in

Digitized by Google

molte questioni di geometria, di fisica matematica, ecc., compajano due funzioni simmetriche di quelle curvature lineari; quali appunto sono la *media aritmetica* e la *media geometrica* dei loro quadrati.

Mi auguro che questa lettera possa trovar favore nella vostra mente. Ad ogni modo desidero vivamente, adesso come sempre, il vostro parere, anche a costo di restarne schiacciato.

Può darsi che pubblichi nei Rend. dell'Ist. Lombardo o negli Acta mathem. (dove comparirà una traduz. francese della Nota) alcune delle mie righe di questa lettera; ma non come righe estratte da una lettera ad un Matematico; bensì come righe aventi per iscopo di impedire che il lettore interpreti la mia Nota nel senso battagliero di cui sopra.

Vi rinnovo i ringraziamenti e vi stringo con rispettoso e caldo affetto la mano

Vostro F. CASORATI.

(*Continua*)

Opere complete ed Enciclopedie.

The Open Court Series of Classic of Science and Philosophy: N. I. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers by* G. CANTOR, *translated and provided with an Introduction and Notes by* Ph. E. B. JOURDAIN. N. 2. *Selections from the Scottish Philosophy of Common Sense, edited, with an Introduction by* G. A. JOHNSTON. Chicago and London, the Open Court publishing Company, 1914 e 1915.

Anche il mondo anglo-sassone volle avere una propria raccolta di classici e (al pari di quanto si è tentato di fare in Italia) riunì i filosofi agli scienziati, iniziando una raccolta di eleganti volumi in 8° picc., di circa 350 pag. ciascuno, posti in vendita al prezzo di 3sh. 6d ciascuno.

L'indolo del nostro periodico non ci consente di parlare del volume che inaugura la serie filosofica e che è dedicato a Th. Reid, A. Ferguson, J. Beattie e D. Stewart. Ma ci corre l'obbligo di richiamare l'attenzione dei nostri lettori sul volume con cui s'inizia la serie scientifica. Esso è dedicato a un insieme di lavori di grande portata, perchè influirono sulla maggior parte

Digitized by Google

delle investigazioni di cui si accrebbe la matematica in quest'ultimo mezzo secolo: sono gli scritti di Giorgio Cantor, cui trae origine la dottrina dei numeri transfiniti, strani enti che, al pari di tutti quelli che sono riflessi del misterioso concetto di " infinito „, diedero luogo a controversie e destarono gagliarda opposizione. Il dotto editore, nella bella *Introduzione*, ne riconnette le origini alla teoria delle funzioni, dovuta a Cauchy, Riemann e Weierstrasse ne spiega i punti più astrusi; nelle note dà poi notizia degli ulteriori sviluppi che la medesima teoria ha ricevuta per merito dei discepoli del Cantor. Perciò in questo volume nulla manca di quanto è necessario per fare intendere ed apprezzare le rivoluzionarie idee dell'eminente matematico di Halle. E noi non possiamo che augurare che i volumi seguenti della nuova raccolta siano dedicati ad argomenti altrettanto importanti e siano curati da persone della competenza e della scrupolosa diligenza dimostrate dal sig. Jourdain.

G. L.

Storia.

Handbuch der naturwissenchaftlichen und mathematischen Unterrichts, herausgeben von J. Morrenberg. I Band: *Geschichte des naturcissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts* von Franz Pahl. Leipzig, Quelle und Meyer, 1913. 8° gr. pagine IX-368.

L'A. parte dal giusto concetto che lo sviluppo storico dell'insegnamento è indissolubilmente collegato con l'evoluzione storica della scienza, ritiene, quindi, che, per determinare le fasi che attraversò l'istruzione scientifica sia indispensabile seguire passo passo le tappe successive delle varie discipline positive. Egli, in conseguenza, ha distribuita la sua storia in tante coppie di capitoli intese a lumeggiare dai suindicati punti di vista una medesima epoca storica. Così la I Sezione dell'opera che stiamo esaminando, essendo dedicata a l'Antichità ed il Medio Evo, abbraccia quattro Capitoli, con i seguenti titoli:

1. Le cognizioni scientifiche degli antichi.
2. L'insegnamento scientifico nell'antichità.
3. Matematica e scienze naturali durante il Medio Evo.
4. L'istruzione scientifica del Medio Evo.

Digitized by Google

Una congenere ripartizione della materia viene adottata nelle Sezioni successive (le quali, giova avvertirlo a scanso di equivoci, contrariamente a ciò che farebbe credere il titolo dell'opera in esame, *concernono esclusivamente la Germania*); ed invero la II Sezione, che si riferisce al Sec. XVI, comprende due Capitoli così intitolati:

1. Vita scientifica nel " Secolo della Riforma ".
2. Fondazione degli ordinamenti scolastici di grado superiore nell'epoca della Riforma; principio dell'istruzione scientifica.

Similmente la III Sezione, in cui si discorre del Secolo XVII, consta di due Capitoli così intitolati:

1. Il " Secolo matematico ".
2. Correnti pedagogiche ed insegnamento scientifico nel Sec. XVII.

E la IV Sezione, cosacrata al Sec. XVIII, si compone dei due Capitoli seguenti:

1. Progressi della scienza e della coltura del " Secolo filosofico ".
2. L'insegnamento scientifico nel secolo XVIII.

Finalmente, anche l'ultima Sezione, che si riferisce al Sec. XIX, consta di due Capitoli intitolati:

1. Scoperte scientifiche e progressi della coltura durante il " Secolo storico ".
2. L'insegnamento scientifico sotto l'influenza dello stato.

Nei capitoli relativi all'insegnamento l'A. ha parlato di regola soltanto delle scuole medie, dedicando alle Università ed all'istruzione superiore in genere solo qualche osservazione indispensabile. Nei Capitoli relativi alla storia della scienza egli, naturalmente, non ha potuto restringersi alla Germania, ma dovette tener conto e tener parola degli avvenimenti verificatisi oltre i confini della sua terra e così ha tracciato, con abilità indiscutibile e notevole competenza, un quadro fedele dell'evoluzione successiva, attraverso i secoli, di tutto il pensiero scientifico. In generale le notizie da lui somministrate sono attendibili; tuttavia egli è incorso in alcune inesattezze che sarebbe colpa da parte nostra il non rilevare.

A pag. 87 il nome di Aldrovandi è divenuto Aldrovandini, menda assai lieve che il lettore correggerà agevolmente; meno facile è ravvisare sotto il Biringuino, citato a pag. 88, l'eminente

Digitized by Google

chimico Biringuccio da Siena che, per merito di I. Guareschi ed A. Mieli, venne di recente riposto all'onore del mondo. Da deplorare si è che egli (p. 55) continui a parlare di Flavio Gioja come di personalità storica reale, dopo che, già da dieci anni, il Congresso internazionale di scienze storiche tenutosi a Roma solennemente ed unanimamente fece voto che, nelle opere scientifiche e scolastiche, si cessasse di far menzione di un nome generato da una serie d'incredibili equivoci. Mentre, parlando di Flavio Gioja, il nostro autore non fa che uniformarsi ad un'abitudine assai diffusa, crediamo si trovi solo nel ritenere (p. 90) che il supplizio di Giordano Bruno abbia avuto lungo a Venezia in Piazza S. Marco, mentre le fiamme che divamparono dal rogo del celebre Nolano gettano tuttora dei foschi bagliori sul Campo di Fiori di Roma. Altrove (p. 153) egli assevera che Eulero arricchì l'aritmetica del " teorema del binomio per coefficienti binomiali „, frase così oscura che non ci riesce a decidere quanto esatta essa sia. Finalmente (p. 157) quando sentenzia che nella " Mécanique analytique „ di Laplace la meccanica trova il proprio sviluppo analitico più completo, assevera cosa non vera, probabilmente applicando alla classica opera di Laplace ciò che andava detto a proposito della " Mécanique analytique „ di Lagrange.

Tali particolari enesattezze, la cui importanza è indiscutibile ma non va esagerata, potranno venire agevolmente corrette, senz'alterare l'architettura generale dell'opera in questione, ove si presenti il bisogno di una nuova edizione. Ma, anche come essa è oggi, il suo valore è indiscutibile, perchè, specie nella parte relativa alla storia di tempi a noi vicini, riesce assai istruttiva, come quella che pone in chiara luce l'influenza straordinaria che gli eventi politici esercitano sopra il progredire della scienza e lo sviluppo della cultura (1). Essa, inoltre, insegna come si presentarono in Germania e come furono trattate alcune fondamentali questioni pedagogiche, di cui anche altrove accadde o accadrà di occuparsi. Finalmente essa fa sorgere prepotente il desiderio che, spinto da nobile emulazione, altri narri la ana-

(1) Così ad. es. l'A. insiste con piena ragione nel porre in evidenza l'influenza deletaria, esercitata sulla Germania scientifica, dalla guerra dei trent'anni, per effetto della quale essa fu l'ultima delle nazioni civili che partecipasse alla grande opera che portò alla creazione della matematica moderna.

Digitized by Google

loghe vicende che subì l'insegnamento scientifico presso altri popoli. Quando si sarà in possesso di lavori di tal fatta relativi ai principali popoli civili, si avranno gli elementi sufficienti per comporre quella storia *generale* dell'insegnamento scientifico, che l'A. aveva fatto sperare col titolo del suo lavoro, inconsciamente traviato dal falso concetto che il mondo finisca ove cessa di essere parlata la lingua di Goethe. G. L.

Die astronomischen Tafeln des Muhammed Ben Musa Al-Khwarizmi in der Bearbeitung des Maslama Ibn Ahmed Al-Madjriti und den latein. Uebersetzung des Athelard von Bath. Auf Grund der Vorarbeiten von A. Bjornbö *und* Besthorn *herausgegeben und kommentiert von* H. Suter. 4° p. XXV-255. Kobenhavn, 1914.

Fin dal 1846 Chasles, in un articolo inserito nei *Comptes-Rendus*, segnalò l'importanza per la storia dell'astronomia della traduzione latina delle tavole di Al-Khwarizmi, senza però farne egli stesso uno studio approfondito.

Quando, seguendo il tacito invito ivi contenuto, specialisti sulla scienza araba esaminarono quell'opera, si avvidero trattarsi di una versione non proprio dell'opera, suddetta ma di una nuova redazione, fattane da Maslama al-Madjriti (m. nel 1007 o 1008). Con ciò il valore dell'opera non veniva diminuito, onde il compianto dotto danese A. Bjornbö dieci anni fà si accinse a pubblicarla, dopo di averne paragonati i mss. esistenti a Oxford, Chartres e Parigi; in seguito alla deplorata sua morte i materiali da lui preparati con l'ajuto dell'egregio arabista suo conterraneo R. Besthorn, passarono all'Accademia danese delle Scienze, che incaricò H. Suter di portare a termine la meritoria intrapresa; compiuta che fu, essa deliberò di pubblicarne il frutto nelle proprie memorie (VII Ser., Sez. letteraria, T. III). Così ebbe origine il volume che oggi segnaliamo agli studiosi, come importante contributo alle nostre cognizioni intorno alla trasmissione del sapere greco attraverso investigatori seguaci di Maometto.

Il volume comprende, anzitutto, l'edizione critica del testo in questione; poi un accurato commento dovuto al Suter, il quale, onde far meglio conoscere il suo autore, fece anche numerose applicazioni numeriche dei procedimenti da lui esposti. Quindi le 116 tavole astronomiche, tratte dall'originale. Finalmente un glossario ed un indice delle cose e dei nomi.

Digitized by Google

Non dubitiamo che quest'opera sia per prendere ben presto un posto onorevole nella biblioteca di tutti gli storici dell'astronomia accanto all'edizione di Albategno fatta dal Nallino.

G. L.

AUGUSTUS DE MORGAN, *Essays on the Life and Work of Newton, edited, with notes and appendices*, by PHILIP E. B. JOURDAIN. 8°. p. XIII + 198. Chicago and London, The Open Court publising Company, 1915 (Prezzo del vol. leg. sh. 5).

Augusto de Morgan (1826-1871) è conosciuto sul continente assai meno di quanto meriterebbe, perchè molte delle sue memorie furono pubblicate in raccolte assolutamente inaccessibili a chi vive fuori dell'Inghilterra e in volumi divenuti ben presto rarissimi. Ad accrescere l'influenza sinora inadeguata che esercitarono le sue idee didattiche e critiche si è recentemente provveduto ristampando due volumi che da tempo non si trovavano più in commercio (1). Che con ancor maggiore ragione, fosse utile di fare altrettanto riguardo agli acuti e detti suoi lavori storici io ebbi a notare in una non lontana occasione (2); ond'è per me cagione di singolare compiacimento il presente volume, in cui si trovano raccolti alcuni dei contributi dati dal de Morgan alle questioni collegate con invenzione del calcolo infinitesimale e con la fisonomia morale di Newton. Mentre il Brewster, il celebre biografo dell'autore dei *Principia*, fece costantemente opera di apologista, il de Morgan assunse la parte ingrata, se così possiamo esprimerci, dell'" avvocato del diavolo „ segnalando acutamente e francamente le colpe che egli non seppe evitare nell'epoca torbida in cui vide minacciata da Leibniz una proprietà su cui egli accampava diritti che riteneva indiscutibili. Il de Morgan lumeggia parecchi punti interessanti del famoso dibattito; ma più volte accenna che una sentenza definitiva non può sperarsi che da una pubblicazione completa dei mss. matematici di Newton attualmente conservati a Cambridge; al voto da lui espresso, che tale pubblicazione venga fatta, noi ci associamo, tanto più

(1) *On the study and difficulty of matematics* e *Elementary illustrations of the differential and integral calculus*, entrambi pubblicati da The Open Court Company (Chicago and London).

(2) V. la conferenza da me tenuta al Congresso internazionale delle scienze storiche (Londra, 4 Aprile 1913) e pubblicata in *Isis*, T. I, 1914.

Digitized by Google

che essa s'impone dopo la deliberata edizione completa di tutti i manoscritti dell'emulo di Newton. Forse quando queste due pubblicazioni saranno poste a disposizioni di tutti (e certamente non prima) si potrà pronunciare un equo giudizio intorno ad una delle più celebri querele che ricordi la storia delle scienze.

Nel volume che oggi annunciamo il sig. Jourdain ha adunati gli scritti newtoniani del de Morgan che non contengono particolari soverchiamente tecnici e li ha muniti di sobrie, ma utilissimo note. Sono: la biografia che egli scrisse nel 1846 dal suo grande compatriota, un articolo redatto sei anni dopo per analizzare alcune recenti pubblicazioni su di lui e Leibniz, l'esauriente analisi da lui fatta dell'opera del Brewster e finalmente due brevi frammenti, uno sul carattere di Leibniz, l'altro intorno all'attitudine della Società Reale di Londra durante il celebre dibattito. L'editore aggiunse di suo un ricco elenco delle principali pubblicazioni a cui deve ricorrere chi vuole formarsi un concetto dello stato attuale della questione di priorità sorta fra Leibniz e Newton.

Auguriamo che il pubblico matematico, facendo festosa accoglienza a questa bella pubblicazione, incoraggi il compilatore a darci un analogo volume destinato a raccogliere i geniali studi del de Morgan sulla storia della matematica greca.

G. L.

Geometria analitica.

G. Salmon. *A treatise on the analitic Geometry of three Dimensions, revised by* Reginald A. P. Rogers. 8° Vol. I, VI edition, 1914, p. XXIV + 470 (Prezzo 9 sh.). Vol. II, V ed., 1915, p. XVI-334 (Prezzo sh. 7. 6). London, Longmans, Green & Co.

La I edizione di questa celebre opera risale al 1862. Nel mezzo secolo trascorso da tale anno la geometria fece progressi veramente straordinari; non soltanto tutti i vari rami che allora la componevano si sono mirabilmente sviluppati, ma, grazie alla creazione della geometria della retta e della teoria delle trasformazioni birazionali, essa ha subito radicali mutamenti e si è arricchita in modo insperato. Malgrado ciò, quell' opera è ancor oggi la migliore guida che si possa porre fra le mani di un giovane desideroso di conoscere la teoria delle curve sghembe e delle super-

Digitized by Google

ficie. Tale invidiabile stato di perenne giovinezza fu assicurato a quell' opera (dal Salmon stesso e da quelli che lo ajutarono o ne presero il posto) con incessanti migliorie ed aggiunte suggerite, consigliate od imposte dalla costante evoluzione della scienza geometrica; ed è da notarsi che le une e le altre vennero eseguite con tale sottile accorgimento che l' architettura generale dell' opera non venne menomamente turbata.

L' opera del Salmon è attualmente conosciuta in Italia più nelle traduzioni in tedesco ed in francese che nell' originale; tanto che noi stessi (cfr. *Bollettino*, XIV, 1912, p. 88) ritenevano che essa avesse cessato di esercitare in Inghilterra la benefica influenza che faceva sentire nell' epoca di Cayley e Sylvester; ora l' esame che abbiamo fatto dell' originale, nelle sue più recenti edizioni, ci ha invece persuasi che essa gode tuttora d'una vitalità che le assicura (anche dopo la scomparsa del suo autore) un' influenza benefica e duratura, quale certo non possono sperare molto altre opere più moderne. Noteremo finendo che lo sviluppo assunto dalle notizie storiche e bibliografiche fece acquistare ad essa la qualità, che non aveva in origine, di opera di consultazione per coloro che intendono proseguire gli studi sulle teorie di cui essa porge i fondamenti.

G. L.

Teoria delle equazioni.

L. E. Dickson. *Elementary Theory of Equations*. New-York, Wiley und Paris, 1914, 8°. p. 184 [Prezzo del vol. leg. dollari 1.75].

Il corso d' algebra complementare nelle nostre Università è uno di quelli che vengono maggiormente criticati e combattuti da coloro che considerano come fine precipuo del primo biennio della Facoltà di Scienze la preparazione scentifica dei futuri ingegneri. L' argomento di preferenza usata dai combattenti in tale direzione è che quel corso contiene molte cose superflue e ben poche di certa utilità pratica. Ora il volume che ci viene oggi dagli Stati Uniti si direbbe scritto per dimostrare la possibilità di dare a quel corso tale assetto e tali proporzioni da renderne palese il vantaggio anche per coloro destinati a vivere sulle impalcature e nelle officine. Il concetto a cui esso s' informa consiste in una larga applicazione della rappresentazione grafica

Digitized by Google

delle funzioni; di essa è fatto uso, non soltanto per discutere, dal punto di vista della realità, le radici delle equazioni cubiche o biquadratiche a coefficienti reali, ma eziandio (seguendo la via tracciata da Gauss) per dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche e per giungere ai metodi di approssimazione delle equazioni numeriche. Non è a credersi però che nell'opera che annunciamo manchino quei capitoli d'algebra ove la rappresentazione grafica non ha alcuna parte, chè vi si trovano le relazioni fra coefficienti e radici, lo studio di alcune speciali equazioni algebriche suscettibili di abbassamento di grado ed anche i teoremi fondamentali della teoria dei determinanti, in vista delle applicazioni che ricevono alla discussione dei sistemi di equazioni lineari ed al calcolo di risultanti e discriminanti.

Il piano sapiente del trattatello in questione basta a raccomandare questo all'attenzione di tutti gli studiosi; come ulteriori sue doti vanno segnalate lo stile chiaro, quantunque stringato, nel quale ha scritto, la ricchissima collezione di esercizi intercalati nel testo e le poche ma esatte notizie storiche introdotte dall'autore nell'intento di " putting real meat upon the driy bones of the subject „.

Nel secolo scorso l'Europa ha prodotto un grande numero di eccellenti trattati di algebra complementare, onde la maggior lode che possiamo tributare a quello che ci giunge dal di là dell'atlantico è constatato che, accanto ad essi, esso fà un'ottima figura.

G. L.

Fisica Matematica.

E. Borel. *Introduction géométrique à quelques théories physiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1915: 8° p. VII + 139.

Non sarebbe facile desumere il contenuto di questo libro interessante dalla lettura del titolo. L'autore si propone di sviluppare i concetti matematici che possono servire di substrato alle teorie molecolari attualmente dominanti nella Fisica.

La prima parte dell'opera, che è la riproduzione di un breve corso tenuto alla Sorbona, consta di 5 capitoli, di cui esamineremo brevemente il contenuto.

Nel C. 1 l'autore studia analiticamente gli spostamenti di

Digitized by Google

una figura piana nel proprio piano, mostrando che essi sono un caso particolare delle trasformazioni proiettive; passa indi agli spostamenti nello spazio euclideo a 3 dimensioni, definisce la " distanza " di due punti, e determina tutte le trasformazioni che lasciano invariate le distanze reciproche dei punti, concludendo che le sole trasformazioni di tal natura sono le lineari. Nel C. 2 l'a. sviluppa in modo analogo la geometria euclidea a 4 dimensioni: mostra che nello spazio a 4 dimensioni ogni trasformazione lineare ammette uno, ed in generale un solo, punto fisso; esprime i 16 coefficienti d'una trasformazione mediante 6 parametri.

Il C. 3 è dedicato ad una speciale geometria piana iperbolica, che si ottiene dalla geometria euclidea sostituendo ai punti ciclici i punti all'infinito di due rette ortogonali. La " distanza " di due punti $P_1\ (x_1,\ y_1)$, $P_2\ (x_2,\ y_2)$, o la " lunghezza " del segmento $P_1\ P_2$, è qui:

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x_2)\ (y_1 - y_2)};$$

il luogo dei punti posti a distanza 1 dall'origine è l'iperbola equilatera $x\,y = 1$; gli assi e le rette ad essi parallele hanno la proprietà che ogni loro segmento ha lunghezza nulla; una rotazione non riconduce mai alla posizione iniziale; la perpendicolare è più lunga d'ogni obliqua.

Questa curiosa geometria trova un'applicazione elegante nel principio di relatività.

Consideriamo i movimenti uniformi che possono aver luogo sopra una retta fissa r; se l'ascissa x e il tempo t corrispondente si assumono come coordinate dei punti di un piano, il moto uniforme di velocità v sarà rappresentato in questo piano dalla retta $x = v\,t$. Se la retta r, anzichè esser fissa, scorre su se stessa con velocità costante v', l'imagine del moto del punto considerato sarà la retta $x = (v + v')\,t$. La corrispondenza tra le due rette è un'omografia avente per retta unita l'asse x.

Le cose mutano, se si ammette, secondo il principio di relatività, che la velocità della luce è indipendente dal moto uniforme di traslazione dell'osservatore; in questo caso, supposta la velocità della luce $= 1$, la corrispondenza tra le due rette dev'essere tale che sieno rette unite le $x = \pm t$, Ammesso che la corrispondenza debba essere rappresentata analiticamente da una trasformazione lineare, si trova che questa è la stessa tra-

Digitized by Google

sformazione che rappresenta una " rotazione „ iperbolica. La risultante delle velocità u, v è:

$$w = \frac{u + v}{1 + u\,v};$$

se $u < 1$, $v < 1$, anche $w < 1$.

Nel C. 4 si studiano gli spostamenti iperbolici a 3 e a 4 dimensioni aventi per invarianti rispettivamente le forme:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (t_1 - t_2)^2.$$

Quest'ultimo invariante è quello stesso che figura nelle ricerche di MINKOWSKI e di LORENTZ, dove la quarta coordinata è il tempo; lo spazio corrispondente è a curvatura costante negativa ed eguale al valore reciproco della velocità della luce. Se si hanno 3 sistemi A, B, C, le velocità di B rispetto a C, rispetto ad A, di A rispetto a B, rappresentate come vettori geodetici, formano un triangolo.

Nel C. 5 si considera uno spazio euclideo ad m dimensioni, dove m è supposto molto grande (in particolare $m = 10^{21}$, ordine di grandezza del numero di molecole contenute in un gramma di gas). Lo studio di un tale spazio non presenta difficoltà teoriche essenziali; gli elementi della geometria analitica bastano per calcolare la distanza di un punto da una retta e da un iperpiano a tre dimensioni (*), ed è facile valutare il volume e la superficie della sfera ad m dimensioni, l'area d'una zona e il volume d'un segmento sferico. Però si presentano qui dei risultati paradossali. Il rapporto del volume della sfera a quello del cubo circoscritto decresce rapidissimamente col crescere del numero delle dimensioni; per $m = 10$ è circa $\frac{1}{400}$. Per $m = 10^{21}$ possiamo determinare sopra una superficie sferica di raggio 1 una zona avente per altezza $\frac{8}{10^{12}}$ e la cui superficie è eguale a quella dell'intera sfera a meno di $\frac{1}{107}$. Ciò mostra, osserva

(*) Le formole relative a questi due problemi contengono evidenti inesattezze, a meno che non venga precisato diversamente il significato delle lettere.

Digitized by Google

l'a., come la nostra intuizione geometrica sia del tutto insufficiente a rappresentarci i fatti di una spazio ad un numero grande di dimensioni.

*
* *

La seconda parte dell'opera contiene 7 Note, quasi tutte già pubblicate altrove.

Nella Nota 1 l'a. si propone di dare una base rigorosa alla teoria cinetica dei gas. Comincia col mostrare sopra un esempio relativo al moto degli asteroidi come debbano ridursi a forme precise certe questioni di probabilità. Viene poi a considerare un sistema di n molecole sferiche eguali, perfettamente elastiche, chiuse entro una superficie rigida e fissa. L'insieme delle $3n$ coordinate dei loro centri si può rappresentare con un punto P in uno spazio a $3n$ dimensioni; ai movimenti rettilinei delle sfere ed ai loro urti reciproci e contro le pareti corrispondono movimenti rettilinei del punto P ed urti di esso contro le pareti di un certo campo a $3n$ dimensioni, urti che avvengono secondo le leggi classiche della riflessione. Poichè la grandezza della velocità di P si mantiene costante, rappresentando la velocità con un vettore uscente dalla origine, le estremità V di tali vettori staranno sopra una sfera a $3n - 1$ dimensioni; e l'autore formula in modo preciso e risolve il problema di determinare la probabilità che il punto V si trovi in una parte determinata della superficie sferica. I risultati ottenuti lo conducono alla nota formola di Maxwell esprimente la probabilità che la velocità d'una molecola gasosa sia compresa fra due dati limiti infinitamente vicini.

Nella Nota 2 l'a. mediante ragionamenti molto ingegnosi fa vedere come anche nelle questioni più semplici di meccanica il passaggio da condizioni astratte, ideali a condizioni reali quanto poco si vuole da esse differenti porti mutamenti fondamentali nelle conclusioni. Alla stessa questione si riferisce la Nota 4, dove l'a. sull'esempio dell'equazione del moto dei risonatori lineari dimostra come una variazione infinitamente piccola in una equazione differenziale muti radicalmente il carattere dell'integrale di essa.

Le Note 3 e 6 sono brevi osservazioni sulla teoria della relatività.

Digitized by Google

La Nota 5 contiene la risoluzione elementare d'un problema di probabilità geometriche.

Infine la Nota 7 è una conferenza fatta a Houston (Texas), avente la scopo di mettere in luce l'influenza esercitata dalle teorie molecolari sullo sviluppo della matematica.

*
* *

Come risulta dal breve riassunto che precede, l'opera di cui parliamo ha carattere frammentario: essa presenta ineguaglianze e ripetizioni, e in vari punti si vorrebbe vedere più chiaramente lumeggiato il nesso fra certi risultati matematici e la realtà fisica. Ma queste mende sono forse inevitabili, per la novità e difficoltà dell'argomento trattato, e non diminuiscono affatto l'interesse dell'opera, dovuto all'originalità delle idee, alla profondità ed acutezza delle osservazioni, e sopra tutto alla grande attrattiva del soggetto. Oggidì che alla eccessiva specializzazione va succedendo un progressivo ravvicinamento delle varie scienze, il nuovo libro di Borel è destinato indubbiamente a prestare a tale ravvicinamento un prezioso contributo.

G. Vivanti.

Fondamenti della Matematica.

J. W. Young, *Lectures on fundamental Concepts of Algebra and Geometry. Prepared for Publication with the Cooperation of* W. W. Denton. *With a Note on "The Growth of Algebraic Simbolism" by* U. G. Mitchell. New-York, The Macmillan Company, 1911. 8° VII + 247.

Questo volume ebbe origine da un corso di lezioni fatte all'università dell'Illinois nell'ano 1909 e serba tracce evidenti della sua origine. Esso fu scritto con lo scopo di porgere un'idea delle questioni logiche e didattiche collegate ai fondamenti dell'algebra e della geometria, delle ricerche compiute su tale importante argomento e delle conclusioni a cui si è giunti. Tranne in qualche raro punto, l'A. non suppone nei suoi lettori che le prime nozioni di matematica; onde il libro in esame riuscirà intelligibile non soltanto ai futuri insegnanti, ai quali è principalmente destinato, ma anche ai filosofi ed ai logici. Inutile dire che molto spazio è dedicato ai concetti fondamentali della nostra scienza,

Digitized by Google

tanto a quelli di antica data quanto quelli la cui fondamentale importanza fu solo di recente riconosciuta e misurata; altrettanto ne è consacrato alla distinzione fra le proposizioni assunte come evidenti e quelle da dedursene come conseguenze; finalmente l'A. ritorna a più riprese sul problema del come definire la matematica, passando in rassegna le varie soluzioni che ne furono dato e facendone rilevare i pregi ed i difetti. Quando avremo aggiunto che l'A. conosce a fondo tutta la letteratura, ormai vastissima, sull'argomento avremo completato l'enumerazione delle ragioni per le quali riteniamo che il libro del prof. Young va consigliato a tutti coloro che desiderano di formarsi un concetto adeguato intorno agli studi che furono fatti per porre alla prova la solidità dell'odierno edificio matematico e per renderne più sicure le basi; fra essi sono in prima linea da porsi i futuri insegnanti di ogni ordine di scuole.

G. L.

Analisi matematica.

Filippo Sibirani *Riassunto-formulario di Geometria analitica, Algebra, Calcolo infinitesimale, Calcolo vettoriale e Meccanica razionale.* 8° pagg. IV + 575. Roma, Atheneum, 1915 (Prezzo L. 12.)

Non fanno certo difetto in Italia eccellenti libri di testo per le materie analitiche che si insegnano nel primo biennio delle nostre Università; e sono tali che lo studente può in essi trovare fedele riproduzione di quanto già ebbe ad ascoltare dalla viva voce del professore, e vedersene facilitato l'apprendimento; ma una sintetica esposizione che trascendesse dalla monotona aridità di un formulario e che l'altronde si riferisse alle sole materie suaccennate, d'importanza fondamentale per gli ingegneri e per i matematici puri, non era finora apparsa nel nostro campo librario; — ed è appunto questa lacuna che il nostro A. si è proposto di colmare. Già qualche anno addietro egli aveva pubblicato in litografia, per uso degli studenti dell'Ateneo bolognese, un Riassunto congenere di Algebra, Geometria analitica e Calcolo infinitesimale che, rapidamente esaurito, l'aveva convinto della utilità dell'opera; ma il libro che ora ci presenta, di mole assai superiore all'altro, contiene in più il Calcolo vettoriale e la Meccanica razionale, ed è compilato in guisa da potere adat-

Digitized by Google

tarsi agli indirizzi d'insegnamento seguiti nelle varie università. Dirò anzi di più: intenzionalmente modesto nel suo fine immediato, che è quello di giovare a chi abbia sufficiente conoscenza delle discipline trattate e quindi alieno dalla pretesa di sostituire i testi universitarî, questo *Riassunto-formulario* raggiunge poi uno scopo pratico non trascurabile, in quanto potrà efficacemente servire sia agli studenti in prossimità degli esami, sia ai laureati che si presentano ai concorsi per le Scuole medie, sia infine a quanti altri, matematici, scienziati, ingegneri, abbisognano di un " mezzo di rivedere sinteticamente lo svolgersi delle varie teorie, di richiamare i legami che esistono fra di esse e di ravvivare la memoria di concetti, di risultati, di regole, e di formule già note „.

Sarebbe vano tentare di riassumere l'opera, che è di per sè stessa un riassunto; ma gioverà sapere che ogni capitolo contiene le necessarie " definizioni, gli enunciati dei teoremi nella loro successione logica, i principali problemi e le loro soluzioni, le formule che queste e quelli traducono in simboli matematici „.

I Capitoli I-XI si riferiscono alla Geometria analitica e comprendono principalmente: sistemi di coordinate e loro trasformazioni; luoghi e inviluppi piani di 1.° e di 2.° grado; piano punto e retta nello spazio; quadriche; proiettività tra forme di 2.ª e tra forme di 3.ª specie; curve piane, superficie e curve storte speciali.

L'Algebra è trattata nei Capitoli XII-XXXII che riguardano: congruenze; calcolo combinatorio ed applicazioni, determinanti, sistemi di equazioni lineari; numeri reali e numeri complessi e loro corrispondenza coi punti di una retta e di un piano; limiti, algoritmi infiniti; funzioni, equazioni algebriche e loro risoluzione algebrica e numerica.

Nei Capitoli XXXIII-LI, dedicati al Calcolo infinitesimale, sono esposte altre nozioni generali sulle funzioni; infinitesimi ed infiniti; integrale definito; derivate e differenziali delle funzioni di una o più variabili; integrazione indefinita; formule del Taylor; forme indeterminate; massimi e minimi; serie di funzioni; trascendenti elementari; applicazioni geometriche del Calcolo; equazioni differenziali, elementi del calcolo delle variazioni.

Le prime nozioni di Calcolo vettoriale sono riassunte nei Cap. LII-LIV: operazioni sui vettori; punti o vettori funzioni di variabili numeriche, funzioni di un punto; applicazioni geometriche ed analitiche della teoria dei vettori.

Digitized by Google

Finalmente i Cap. LV-LXIX, in riferimento alla Meccanica razionale, compendiano: cinematica del punto e dei sistemi rigidi; principi della statica; equilibrio dei sistemi articolati e dei fili; dinamica del punto e dei sistemi rigidi; attrazione newtoniana; statica e dinamica dei fluidi.

Lo sviluppo schematico di ciascun argomento è assai più vasto di quanto potrebbe apparire dalla mole del volume, che non raggiunge le 600 pagine in 8° picc. Per es., le 25 curve piane speciali definite nel Cap. V sono poi quasi tutte riesaminate nel Cap. XLV relativamente ai problemi di determinazione delle aree, delle lunghezze d'arco, delle tangenti, normali, etc.; e finalmente sono, molte fra esse, richiamate più oltre ancora, nella Meccanica razionale. Si vede dunque che non solo ai varî soggetti vien data rilevante estensione, ma sono anche ben poste in luce le relazioni fra loro intercedenti: ed è questa appunto una delle più belle qualità del manuale. Il quale sarà senza dubbio bene accolto dal pubblico degli studiosi; e meglio ancora lo sarebbe, a mio parere, se all'Algebra fosse ridata la precedenza sulla Geometria analitica, ciò che sembra più naturale e che, consentirebbe p. es. di eseguire rapidamente le trasformazioni più usuali nelle equazioni delle coniche e delle quadriche, utilizzando alcuni invarianti delle forme algebriche considerati nel Cap. XXVIII. Il pregio del libro verrebbe di molto accresciuto da un buon corredo di figure, che tanto giovano a fissare nella mente certi concetti fondamentali; e perchè non dire pure che con la scelta di altri caratteri e di altro formato il Volume diverrebbe di più comoda consultazione? Ma queste semplici osservazioni nulla tolgono al valore dell'opera e quasi vogliono esprimere l'augurio di una prossima nuova edizione, quale si merita un libro ben fatto, conciso, chiaro, corretto, utilissimo vademecum per gli studenti e per tutti i cultori delle Scienze matematiche.

Luigi Galvani.

Meccanica.

Gian Antonio Maggi. — *Geometria del movimento.* — Lezioni di Cinematica con un'appendice sulla Geometria della massa. Pisa, Enrico Spoerri, 1914, pp. V-225. (Prezzo L. 8).

Perchè « Geometria del movimento » e non « Cinematica »? Questa domanda è indotto spontaneamente a farsi il lettore prima ancora di aprire il libro.

Digitized by Google

E in vero il carattere, particolarmente matematico, del trattato giustifica la denominazione preferita dall'A. con acuto senso di opportunità: in questo trattato — informato al concetto di dare le nozioni preparatorie necessarie allo svolgimento della Dinamica (*) — si renda manifesta la scrupolosa cura posta dall'A. di conservare la armonica purezza dell'edificio geometrico.

L'A. fa largo uso del calcolo vettoriale o, più precisamente, di quelle operazioni di calcolo vettoriale che sono ormai entrate nell'uso più comune e che hanno trovato cittadinanza in tutti i corsi di meccanica razionale.

Le notazioni corrispondono a quelle proposte da Burali-Forti e Marcolongo, ferventi apostoli dell'algoritmo vettoriale.

Non rinuncia tuttavia l'A. ai mezzi tradizionali della geometria analitica, sfruttando talora entrambi gli algoritmi, cartesiano e vettoriale, in una medesima questione; sempre però con saggio criterio di misura. Che se in molte questioni il metodo vettoriale conferisce speditezza di procedimento e perspicuità di risultati, in altre è al metodo cartesiano che conviene accordare la preferenza, così da lasciare presumere che ancora « possa conservare per l'avvenire la sua secolare freschezza ».

L'opera è divisa in quattro capitoli, seguiti da un'appendice. I quattro capitoli sono preceduti da « Preliminari ».

In essi l'A. stabilisce la nozione di « punto mobile », di « sistema mobile » soffermandosi, in particolare, sui sistemi rigidi, dei quali definisce l'orientazione mediante gli angoli di Kirchhoff. Per i sistemi mobili in generale, l'A. definisce le coordinate di un sistema ed il grado di libertà; nozioni logicamente perfette, ma che mi lasciano alquanto dubbioso circa la loro efficacia didattica in un primo insegnamento, a cagione della veste astratta sotto la quale vengono presentati.

I quattro capitoli recano i titoli: Spostamento — Movimento — Velocità — Accelerazione.

Per quanto riguarda l'ordine generale dei concetti svolti,

(*) Si tratta delle lezioni di cinematica che formano la seconda parte del corso di meccanica razionale, che l'A. svolge nell'Ateneo pisano.

Dell'altra parte venuta alla luce pochi anni fa — Dinamica fisica (Pisa, Spoerri, 1912) — i lettori del *Bollettino* ne furono già informati (*Bollettino* del 1914, pp. 39-48 e 78 83) mediante circostanziata recensione del Giorgi.

Digitized by Google

esso corrisponde sostanzialmente a quello già adottato dall'A. nel trattato « Principii della teoria matematica del movimento dei corpi » [Milano, Hoepli, 1896; Cinematica cap. I, II, III, IV]; ma la trattazione odierna ne differisce sia per una maggiore agilità, consentita dall'uso dello stromento vettoriale, sia per opportune e notevoli aggiunte.

Il primo capitolo è di natura puramente geometrica. L'analisi dello spostamento rigido viene ivi fatto con mezzi geometrici prima e colla ordinaria trattazione analitica poi.

L'A. si compiace di soffermarsi in ispecial modo sugli spostamenti omografici, introducendo il concetto e le espressioni del coefficiente di dilatazione lineare e del coefficiente di dilatazione cubica. Il capitolo termina colla trattazione degli spostamenti regolari dei sistemi continui. Particolari considerazioni sono rivolte agli spostamenti infinitesimali; vengono ricavate, sempre con semplicità di mezzi, le espressioni delle caratteristiche della deformazione, delle componenti della rotazione e dei coefficienti di dilatazione lineare e cubica.

Secondo capitolo: *Movimento.* Le nozioni puramente geometriche non sono più sufficienti: è necessario introdurne una nuova il tempo.

Nel trattato del 1896 l'A. inizia il capitolo con un paragrafo « Determinazione del tempo ». Il *tempo* che un fenomeno impiega a compiersi è ivi definito come quantità proporzionale all'angolo di cui gira il globo terrestre fra il principio e la fine del fenomeno; per definire il movimento di un punto poi, viene coordinata la posizione alla variabile che rappresenta il tempo.

Nel trattato attuale il capitolo si inizia con « Generalità ». L'A. sembra voler evitare, per quanto è possibile, la nozione fisica di tempo; esso viene introdotto come un parametro, al valore del quale si coordina la posizione del punto mobile.

È questo uno dei punti, ove si palesa chiaramente la cura dell'A. di allontanare dalla trattazione tutto ciò che può, anche soltanto momentaneamente, offuscare la purezza geometrica del libro; ciò che conferma l'opportunità del titolo di esso. « Il significato concreto del parametro, indicato come tempo — detta l'A. a pag. 61 — non è veramente essenziale per la pura cinematica. Tuttavia per coordinare, senz'altro, la cinematica alla dinamica.... ».

Vengono introdotti successivamente: il concetto di « traiet-

Digitized by Google

toria » di un punto, usando tanto la rappresentazione autonoma, quanto quella cartesiana; « equazione del movimento sulla traiettoria » cioè la relazione analitica che esprime l'arco orientato in funzione del tempo; « la quantità di velocità » quale derivata della funzione precedente.

Tali concetti vengono illustrati colla trattazione dei moti più semplici, uniforme, uniformemente accelerato, moto armonico semplice, moto armonico ellittico e in particolare, moto armonico circolare.

La velocità, in senso vettoriale, viene introdotta solamente nel moto uniforme e nel moto parabolico, dove trova posto vettorialmente anche l'accelerazione.

Si passa poi al « Movimento di un sistema ». Definito il « Movimento traslatorio » e il « Movimento rotatorio » l'A. si sofferma a definire il « Movimento polare » e infine tratta del « Movimento rigido ». Di ciascuno di questi movimenti vengono specificate le « coordinate » atte a caratterizzarli.

Dopo questi particolari tipi di movimento l'A. definisce « Movimento regolare » di un sistema, quello secondo cui la configurazione ad un generico istante dipende in modo regolare dalla configurazione iniziale, tale regolarità andando naturalmente riportata agli elementi che caratterizzano la configurazione.

Il capitolo si chiude collo studio del movimento relativo sia di un punto, che di un sistema. Le relazioni tra il movimento relativo e il movimento assoluto vengono fissati sia sotto aspetto vettoriale, sia coll'abituale forma cartesiana. Come esempi semplici e notevoli vengono studiati il moto rettilineo uniforme, e il moto rettilineo uniformemente accelerato, di un punto rispetto ad assi dotati di moto rettilineo uniforme; infine il moto rettilineo uniforme di un punto rispetto ad una terna uniformemente rotante.

Capitolo terzo: *Velocità.* Definita vettorialmente la velocità e lo spostamento infinitesimale di un punto, accennato al problema della determinazione del moto, nota la velocità, l'A. definisce « Atto di movimento » di un sistema, in un istante, l'insieme delle velocità di tutti i punti del sistema in quell'istante.

Felicissima denominazione, che l'A. del resto aveva già data nel trattato del 1896, e che — mi consenta l'A. la preferenza — molto opportunamente avrebbe potuto mettersi a titolo del capitolo.

Digitized by Google

Atto di movimento e spostamento elementare nel movimento traslatorio, nel movimento rotatorio, nel movimento polare, nel movimento rototraslatorio e nel movimento rigido, formano oggetto di lucida trattazione particolare in cui l'elegante esposizione dei concetti è sposata a lodevole economia dei mezzi atti a svilupparli. Notevoli per eleganza di trattazione geometrica le applicazioni al movimento di una figura rigida piana nel proprio piano.

La cinematica dei sistemi continui viene sviluppata in modo sobrio e completo: vengono messi in luce i due punti di vista molecolare (di Lagrange) e locale (di Eulero).

Seguono: la composizione dei movimenti rotatori e il teorema del parallelogramma delle velocità, la cui dimostrazione autonoma, unitamente a quella del teorema di Coriolis, l'A. aveva resa già nota agli studiosi (*).

Il capitolo si chiude con eleganti applicazioni alle rigate rotolanti.

Si perviene così all'ultimo capitolo: *accelerazione.*

Definita vettorialmente l'accelerazione di un punto e introdotto l'odografo, si passa alle espressioni cartesiane equivalenti e a quelle dell'accelerazione tangenziale e centripeta, chiudendo le generalità col sistema di equazioni differenziali che determinano il moto nota la acceleraztone e le circostanze iniziali.

Il moto centrale forma oggetto di particolare studio da parte dell'A., che opportunamente si indugia a trattare i due casi più notevoli, elastico e newtoniano, nel primo dei quali l'accelerazione è proporzionale alla distanza del punto dal centro del moto e nell'altro è inversamente proporzionale al quadrato di detta distanza.

Il capitolo si chiude con un'elegante dimostrazione del teorema di Coriolis, cui ho già accennato più sopra, e riguardo al quale l'A. trova conveniente accennare alla consueta deduzione con formole scalari, e con un semplice accenno alle accelerazioni di ordine superiore.

L'appendice, che come ho già detto, segue i quattro capitoli, è divisa in due parti: « Geometria della massa » e « Appunti ».

Nella prima parte, introdotta in modo puramente formale la

(*) « Sulle relazioni fondamentali del movimento relativo » [Giornale di Matematiche di Battaglini, Napoli, Vol. XLIX (1911), pag. 105-108].

Digitized by Google

massa e la *densità*, quest'ultima come una funzione positiva dei punti del mobile, e la prima come suo integrale, l'A. deduce l'equazione della conservazione della massa sotto la forma lagrangiana. Definisce poi il « punto materiale » un punto mobile al quale, con un criterio da convenirsi, si attribuisca una massa. La trattazione puramente formale, per quanto risponda al carattere del volume, non è qui accompagnata da un conveniente significato fisico. Reputo, dal punto di vista didattico, più desiderabile una più intima fusione tra concetto fisico e geometrico. Del resto anche l'A. sente il bisogno di accennare che « le quantità in discorso trovano la loro applicazione nella dinamica ».

In modo vettoriale rapido ed elegante l'A. presenta e tratta i centri di gravità, i momenti di inerzia, la forza viva, le quantità di moto, il risultante e il momento delle forze motrici.

Nella seconda parte dell'appendice: *Appunti*, l'A. presenta alcune note: una sulla conveniente limitazione dell'intervallo di tempo durante il quale si studia il movimento, che va regolato a seconda delle questioni che si devono studiare; un'altra sul metodo delle omografie vettoriali, di cui Burali-Forti e Marcolongo sono i principali autori, di essa l'A. dà un breve cenno coll'aiuto dell'algoritmo cartesiano; la terza nota è di suggestiva modernità, essa riguarda il principio di relatività che l'A. presenta nella sua forma più semplice, introducendo la nozione di tempo locale, senza ancora modificare le intuizioni abituali.

Il libro si chiude con una tavola esplicativa delle notazioni vettoriali impiegate nel testo.

Chiuso il libro si prova la sensazione di chi si diparte da persona con cui ha sino allora sostenuto dotta e suggestiva conversazione. Quale miglior elogio per un libro?

U. Cisotti.

Notizie.

Premi proposti dall'Istituto di Francia. *Premio Bordin*: (3000 fr.) per l'anno 1917: " Perfezionare in qualche punto importante la teoria aritmetica delle forme non quadratiche ".

Gran Premio delle scienze matematiche (3000 fr.): L'iterazione di una sostituzione ad una e più variabili, cioè la costruzione di una serie di punti successivi P_0, P_1, .. P_n ..., ognuno dei quali si ottiene dal precedente col mezzo di una stessa opera-

Digitized by Google

zione: $P_n = \varphi(P_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ove φ dipende ad es. razionalmente da P_{n-1} ed il primo P_0 è pure dato, interviene in molte teorie classiche ed in alcune delle più celebri memorie di Poincaré. Sinora i lavori consacrati a tale studio concernono specialmente il punto di vista " locale ". Ora l'Accademia giudica che sarebbe interessante passare all'esame del completo dominio dei valori che possono assumere le variabili; in conseguenza pone a concorso, per l'anno 1918, la seguente questione: " Perfezionare in un punto importante lo studio delle potenze successive di una stessa sostituzione, quando l'esponente della potenza cresce indefinitamente. Si considererà l'influenza della scelta dell'elemento iniziale per una data sostituzione e si potrà limitarsi ai casi più semplici, quali le sostituzioni razionali di una variabile ".

Premio Vaillant (4000 Fr.) per l'anno 1917: " Determinare e studiare tutte le superficie che possono generarsi in due modi differenti mediante il movimento di una curva invariabile ".

*
* *

The mathematical Asssciation of America. È questo il nome di una nuova società matematica di cui furono gettate le basi a Columbus (Ohio) il 31 Dicembre 1915, con lo scopo di ajutare lo sviluppo delle matematiche negli Stati Uniti, specialmente dal punto di vista didattico. Organo ufficiale del nuovo sodalizio è il ben noto periodico " The American Mathematical Monthly ", che, nel fascicolo di Febbraio 1916, ha pubblicato lo statuto del sodalizio stesso. Il presidente della " Mathematical Association " prof. E. R. Hendricks ne ha fatto conoscere le origini, gli scopi e la struttura in un interessante articolo inserito nel fascicolo datato 11 Marzo 1916 della rivista " School and Society ".

*
* *

Proroga di concorso. Il termine per la presentazione dei lavori concorrenti al premio che il Re di Svezia conferirà in occasione del VI Congresso internazionale dei Matematici (v. questo *Bollettino* T. XV, 1913, p. 128), fu, tenuto conto delle attuali condizioni del mondo, prorogato al 31 Ottobre 1917.

Digitized by Google

*
* *

Riccardo (Giulio Guglielmo) Dedekind nacque a Branuschweig il 6 Ottobre 1831. Assolti gli studi secondari nella propria città natale, si recò all'università di Gottinga, ove nel 1852 ottenne la Laurea dottorale dietro presentazione di una Dissertazione sopra gli integrali auleriani. Due anni dopo divenne ivi libero docente; nel 1858 fu chiamato ad insegnare nel Politecnico di Zurigo, che abbandonò quattro anni appresso per l'analogo istituto della propria città natale. Ivi morì il 13 Febbraio 1916. Grande è la benemerenza acquistatosi dal Dedekind pubblicando le *Lezioni sulla teoria dei numeri* di Dirichlet: nella matematica gli lascia poi un'orma indelebile per la sua teoria dei numeri irrazionali, per le sue ricerche sopra i numeri algebrici e per un grande numero di memorie originali sulle questioni più elevate ed importante dell'aritmetica superiore.

*
* *

Istituto matematico dei coniugi Mittag-Leffler. L'eminente direttore degli *Acta mathematica* ha disposto che dopo la morte sua e della sua consorte, la sua villa di Djurshelm (vicino a Stoccolma) e tutta la sua sostanza servano alla fondazione ed al mantenimento di un grande Istituto destinato all'incremento delle matematiche *pure*, specialmente nei quattro paesi scandinavi (Svezia, Norvegia, Danimarca, Finlandia). Tale istituto provvederà al conseguimento dello scopo prefisso dai munifici donatori mantenendo ed accrescendo le Biblioteca iniziata dal prof. Mittag-Leffler, accordando delle borse di studio a giovani appartenenti ad uno dei quattro paesi suddetti e conferendo (possibilmente ogni sei anni) dei premi alle più grandi scoperte matematiche, senza tener conto della nazionalità dell'autore. Alla direzione dell'Istituto sarà preposto un eminente matematico, nominato dal re di Svezia e provveduto di uno stipendio superiore a quello di cui godono i professori universitari scandinavi. Dell'attività dell'Istituto verrà data notizia al pubblico in una seduta solenne da tenersi almeno ogni sei anni. Per desiderio dei testatori l'erigendo istituto dovrà modellarsi, nei limiti del possibile, all'*Institut Pasteur* di Parigi.

Digitized by Google

*
* *

TEMI DI MATEMATICA PROPOSTI DALLA R. ACCADEMIA DI MADRID PER GLI ANNI 1916-1918: " Esposizione chiara e metodica dei problemi di cui si occupa attualmente la Geodesia, a partire da quelli che formavano nell'antichità lo scopo principale delle sue operazioni, ed esame delle modificazioni recentemente introdottevi „. Scadenza 31 Dicembre 1916.

" Monografia storica-scientifica sopra i matematici spagnuoli anteriori al Secolo XVIII „. Scadenza 31 Dicembre 1917.

*
* *

BIBLIOTECA SCIENTIFICO-POLITECNICA INTERNAZIONALE. È questo il titolo di un volume di pagine XXIV-468 pubblicato nel Febbraio 1916 dall'editore U. Hoepli di Milano e contenente una Bibliografia delle più importanti opere italiane e straniere sulle scienze esatte, l'ingegneria, le belle arti ecc. stampate dal 1905 al 1915. Si tratta di un *vade-mecum* indispensabile a tutti coloro che si dedicano a studi di matematica pura ed applicata; la sua importanza è chiaramente stabilita in una bellissima Prefazione scritta da G. Colombo, un'autorità indiscussa sulla materia.

*
* *

I MANOSCRITTI DI S. LIE, depositati presso la Società scientifica di Christania, riempiono più di 20 mila pagine in foglio; essi furono ordinati dal Lie stesso nel 1898 e distribuiti in 65 pacchi, i quali vennero accuratamente esaminati dal Sylow, dall'Holst e dal Guldberg, che ne estrassero, sino dal 1902, la memoria *Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen* (Videnskab Skrifter, I, Chistiania 1902). Ora, per disposizione pel succitato sodalizio, ne fu pubblicato un indice particolareggiato col titolo *Verzeichniss über den wissenschaftlichen Nachlass vou Sophus Lie*; *I Mitth. von C. Strömer,* Christiania, 1905; *II Mitth. von Alf Guldberg,* 1913. Esso verrà consultato con grande interesse dai numerosi ammiratori del grande matematico norvegese; intanto esso rivela in quella raccolta di mss. una fonte preziosa per lo storico che vorrà minutamente seguire l'evoluzione delle idee del Lie.

PAVIA - PREM. TIP. SUCC. FRAT. FUSI

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

d'Abano 110.
Abel 28,80.
Aldrovandi 123.
Al-Khwarizmi 125.
Allen 15.
Al-Madjriti 125.
Archimede 66-67, 85, 112.
Arzelà 6, 108.
Ascoli 33, 108, 119.

Bacone R. 79.
Bagnera 2, 5.
Barzini 1.
Battaglini 114.
Beattie 121.
Bellavitis 45.
Beltrami 22, 50, 55, 56, 57, 61, 62, 64, 114.
Bernegger 109.
Bertini 11, 12, 14, 19, 21, 22, 61, 114.
Besthorn 125.
Betti 4, 57.
Bigourdan 48, 78, 80.
Biringuccio 124.
Bjornbö 125.
Bianchi 84-92.
Blaserna 47.
Borchardt 24.
Bordin 141.
Borel 95, 96, 129-133.
Brewster 126, 127.
Brill 15.
Brioschi 11, 22, 31, 33, 52, 54, 60.
Bruno (Giordano) 124.
Bützenberger 45-46.
Burali-Forti 137, 141.

Cajori 111.
Caldarera 36-37.
Cantoni 57.
Cantor G. 33, 103, 104, 121-122.
Capelli 5.
Capponi 111.
Capsoni 61.
Carson 73-78.
Casorati 21 22, 23, 20, 31, 32, 33, 34, 35, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 56, 57, 58, 49 60, 61, 62, 63, 64, 81, 82, 83, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 121.
Castelnuovo 12, 15, 16.
Cauchy 37, 98, 122.
Cayley 15, 128.
Celoria 47.
Cerruti 4.
Cesàro 96.
Ceva (G.) 110.
Ceva (T.) 112.
Chasles 36, 125.
Chelini 60, 117.
Chini 71-73.
Chisini 107.
Christoffel 24.
Ciani 92.
Cipolla 104.
Cisotti 141.
Clairaut 44.
Colombo 144.
Comessatti 17, 18.
Copernico 80.
Coriolis 140.
Cremona 22, 23, 32, 33, 46, 50, 55, 56, 57, 51, 118.
Crocco 8.

Dedekind 142.
Delisle 48, 80.
Denton 133.
Descartès 66, 71, 111.
Dickson 128-129.
Dini 11, 37.
Dirichlet 23, 28, 31, 42, 43, 63, 143.
Dubini 33.
Duhem 110.

Elliott 79.
Elzevier (Abramo) 110.
Elzevier (Bonaventnra) 110.

Digitized by Google

Elzevier (Lodovico] 110.
Engel 78.
Enriques 102-109.
Erone 69.
Euclide 77.
Eudosso 77.
Eulero 25, 48, 80, 85, 100, 101, 102, 124, 140.

Faraday 79.
Favaro 47, 110.
Fejer 96, 97.
Fergola (Amalia) 11.
Fergola (Emanuele) 11.
Ferguson 121.
Fermat 80.
Fischer 97.
della Francesca 112.
Franchi-Maggi 118.
de Franchis 13, 46.
Fredholm 5.
Fourier 4, 5, 8, 9, 33, 31, 96, 97.
Fubini 102.

Galileo 57, 79, 110, 111.
Galvani 124.
Gauss 8, 25, 45, 69, 119, 129.
Genocchi 57.
Gigi 52.
Gigli 104.
Gioja (Flavio) 124.
Giorgi 137.
G. L. *vedi* Loria.
Gliamas 47.
Goursat 5.
Graf 21, 50, 81, 113.
Grandi 112.
Green 4, 7, 44.
Guareschi 79, 124.
Gubler 57.
Guccia 46.
Guldberg 144.
Guyou 78.

Hagge 45.
Hang 112.
Harnack 64.
Heath 66-67.
Heiberg 66.
Heine 94.
Helmholtz 33, 79.
Helmert 41.
Hendricks 142.
Hermite 65, 118.
Hilbert 95, 97, 93, 100, 108.
Hoepli 144.
Holst 144.
Humbert 13.
Hurwitz 4, 5, 6, 9, 10, 17.

Ichak 48.
Imbriani 6.

Jacoli 21, 42, 100.
Johnston 121, 122.
de Jonquières 15.

Kantor 78.
Kapteyn 55.
Kelvin Lord *vedi* Thomson.
Kirchhoff 137.
Kliem 66-67.
Kluyver 65.
König 37-39.
Koller 53.
Kommerell 103.

Lagrange 124, 140.
Laguerre 87,
Lamé 43, 117.
Laplace 124.
Lebesgue 5, 9, 93, 95.
Legendre 100, 101.
Leibniz 66, 126, 127.
Lemoine 69.
Levi (B.) 94.
Levi (E. E.) 93-102.
Levi-Civita 108.
Libri 111.
Lie 78, 144.
Liebmann 67, 78.
Lindeberg 101.
Lindelöf 107, 108.
de Longchamps 70.
Lorenz 131.
Lorgna 46.

Digitized by Google

Loria 21, 37, 46, 64, 66, 67, 70, 72, 75, 78, 112, 122, 125, 126, 127, 128, 129, 134.
Luzio 111.

Mac-Laurin 111.
Maggi 11, 83, 113, 116, 118, 136-141.
Marcolongo 1, 137, 141.
Mascheroni 48, 69, 77.
Masi 47.
Mawwell 132.
Medici 109.
Merlani 47-48.
Mieli 124.
Milhaud 66.
Minkowski 131.
Mitchel 133.
Mitscherling 66.
Mittag-Leffler 143.
Moigno 35.
Montucla 68.
Morera 41.
de Morgan 126-127.
Morrenberg 122.

Nallino 126.
Natali 48.
Nepero 112.
Newton 66, 80, 126-127.
Nöther 14, 20.
Nunes 67.

Orlando (Luciano) 1-10.
Orlando (Ruggiero) 2.
Osgood 100.
Oughtred 111.

Pacioli 112.
Padoa 107.
Pagani (Elisa) 2.
Pahl 122-125.
de Paolis 114.
Pappo 45, 77, 103.
Parini 33.
Pascal (Alberto) 110.
Pasteur 143.
Peano 2, 103, 104, 105.
Picard 12, 78.
Pitagora 77.
Pizzetti 11, 39-44.
Plancherel 97.
Platone 77.
Pochhammer 25.
Poincaré 12, 40, 43, 142.
Porta 112.
Poult 53. 54.
Pringsheim 5.

Reid 121.
Reimer 68.
Rey Pastor 67.
Riccati 5, 9.
Riesz 97.
Rogers 127.
Rosanes 35.
Rosati 18, 19.
Routh 5.

Salmon 127, 128.
von den Sande 65.
Santi (Alba) 2.
Scalvini 111.
Scarpis 106.
Schläfli 21-35, 49-64, 81-83, 113-121.
Scheffers 64.
Schmidt 93, 97. 99.
Schottky 17.
Schwarz 24, 28, 29, 30, 57, 58, 59, 119.
Segre 16.
Serret 64.
Severi 11.
Sibirani 134-136.
Smith 73-78.
Steiner 45, 69, 107.
Stewart 121.
Stern 83.
Stickelberger 59, 60, 61.
Stieltjes 65-66.
Stokes 41.
Strömer 144.
Stubbs 45.
Suter 125.
Sylow 144.
Sylvester 5, 9, 128.

Digitized by Google

Tait 33.
Taletę 103.
Tannery 66.
Tardy 115.
Tartaglia 77.
Taylor 135.
Thomas 24.
Thomson 33, 45, 79.
Todhunter 111.
Tonelli 100, 107.
Torelli (Gabriele) 11.
Torolli (Ruggiero) 11-21.
Tschirnhausen 6, 9.
Tweedie 111.

Vacca 112.
Vailati 102.
Vaillant 142.
da Vinci (Leonardo) 110.
Vistarini 32, 34, 49, 61, 81.
Viterbi 44.
Vivanti 2, 39, 73.
Viviani 110.
Volterra 5, 100.

Weber 5.
Weterstrass 99, 100, 101, 108, 122.
Weyl 97.
Wertheim 33.
Wohlwill 110.
Wronski 8.

Young 133-134.

Zermelo 38.
Zeuthen 16.

PAVIA - PREM. TIP. SUCC. FUSI

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo

La correspondance entre Ludwig Schläfli et des Mathématiciens Italiens de son époque (J. H. Graf), pag. 113-121.
Opere complete ed Enciclopedie (G. L.), pag. 121-122.
Storia (G. L.), pag. 122-127.
Geometria analitica (G. L.), pag. 127-128.
Teoria delle equazioni (G. L.), pag. 128-129.
Fisica Matematica (G. Vivanti), pag. 129-133.
Fondamenti della Matematica (G. L.), pag. 133-134.
Analisi matematica (L. Galvani), pag. 134-136.
Meccanica (U. Cisotti), pag. 136-141.
Notizie, pag. 141-144.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

BOREL. — Introduction géométrique à quelques théories physiques. L. 5,50.
BRAUDE. — Les coordonnées intrinsèques. L. 2,25.
CASTELNUOVO. — Lezioni di Geometria analitica. Vol. I/III, L. 15.
DOLBNIA J. — Oeuvres mathématiques publiées par Kriloff. L. 12,50.
ENRIQUES. — Questioni riguardanti le matematiche elementari. — Vol. I/II, L. 50.
GUILLAUME. — Les récents progrès du système métrique. L. 5,50.
Handbuch der angewandten Mathematik, hrsg. v. Timerding.
Bd. I: SANDEN. — Praktische Analysis. L. 4,75.
Bd. II: HJELMSLEV. — Darstellende Geometrie. L. 7,25.
HAUSDORFF. — Grundzüge der Mengenlehre. L. 23,50.
SALPETER. — Einführung in die höhere Mathematik. L. 15,50.
SMITH e MIKAMI. — History of Japanese Mathematics. L. 20.
ZEUTHEN. — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. L. 21.

GUIDA ALLO STUDIO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

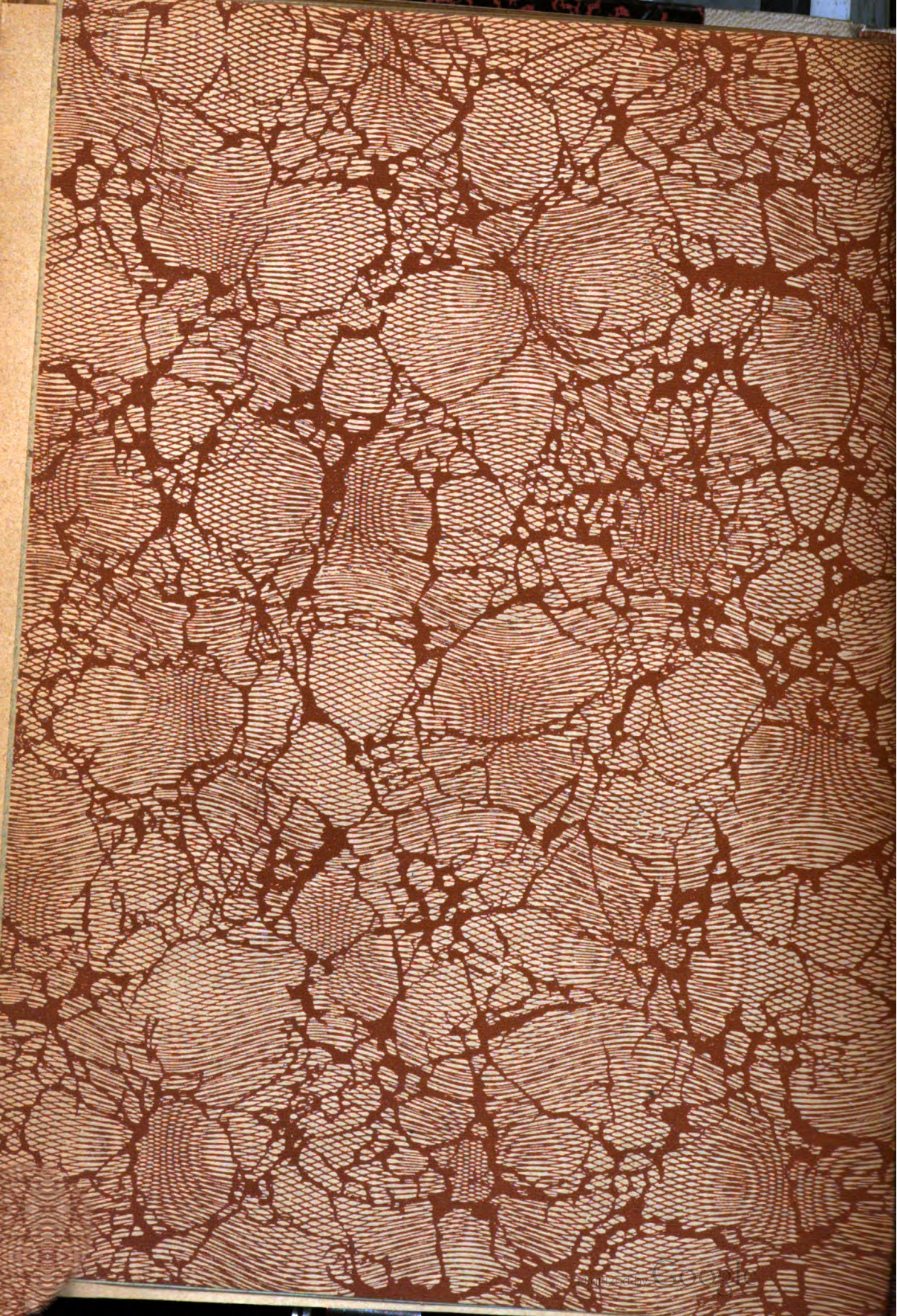
DEL

Prof. GINO LORIA

Prezzo del volume elegantemente rilegato L. 3.

MILANO
ULRICO HOEPLI

1916

Digitized by Google

Digitized by Google